Universidade Federal do Pampa
UNIPAMPA

Oscilações

Prof. Luis Armas

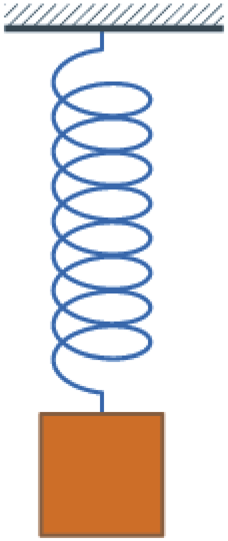
- **Que é uma oscilação?**
- **Qual é a importância de estudar oscilações?**

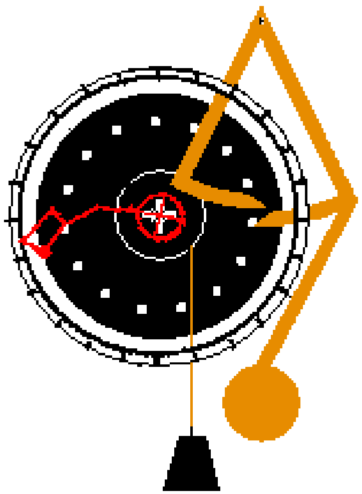
SUMARIO

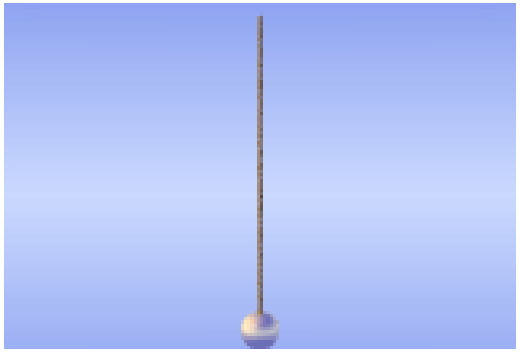
- **Movimentos oscilatórios periódicos**
- **Movimento harmônico simples (MHS)**
- **Sistema massa-mola**
- **Representação matemática do MHS**
- **Representação gráfica do MHS**
- **Definição de frequência e período**
- **Equações de movimento do MHS**
- **Energia no MHS**
- **Pêndulo simples**
- **Oscilações amortecidas**
- **Oscilações forçadas**

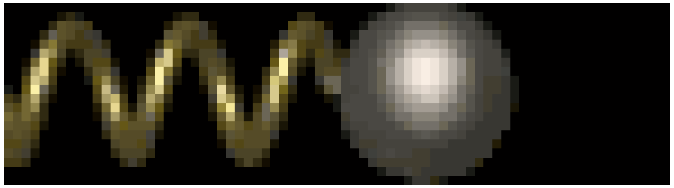
<u>INTRODUÇÃO</u> - MOVIMENTO OSCILATÓRIO

Estamos familiarizados com diversos tipos de movimentos oscilatórios periódicos

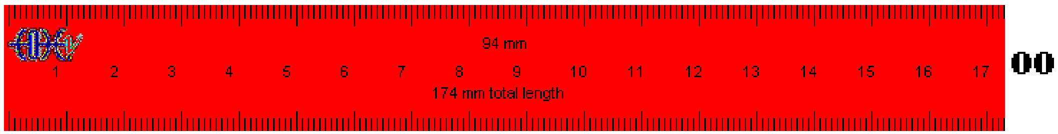


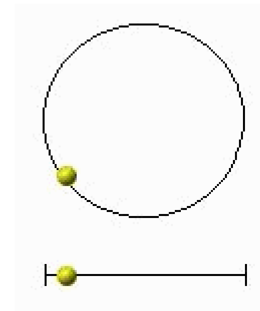


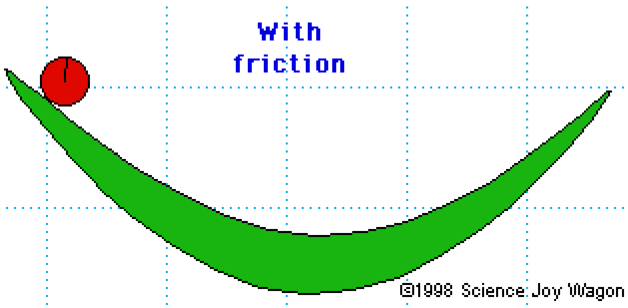


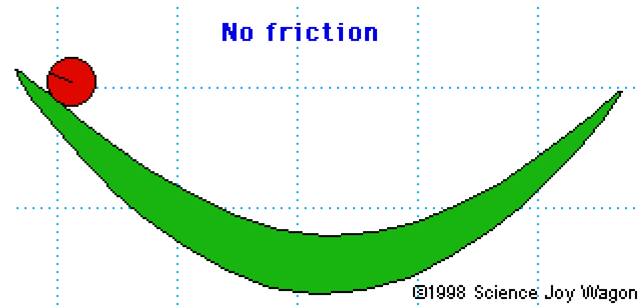


mais exemplos de movimento oscilatório



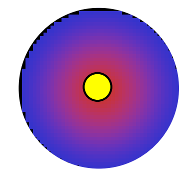






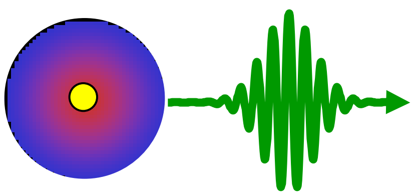
outros exemplos de movimento oscilatório

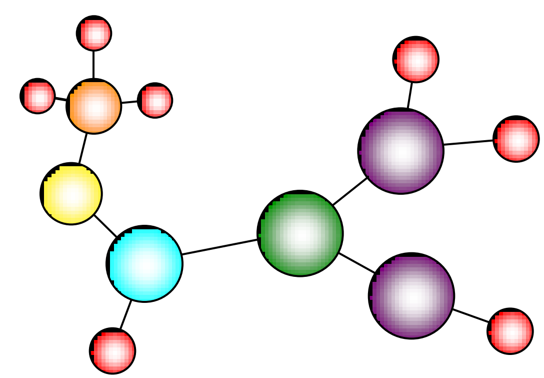
Vibrações atómicas e moleculares para estados excitados



Eletrões vibram em torno do núcleo

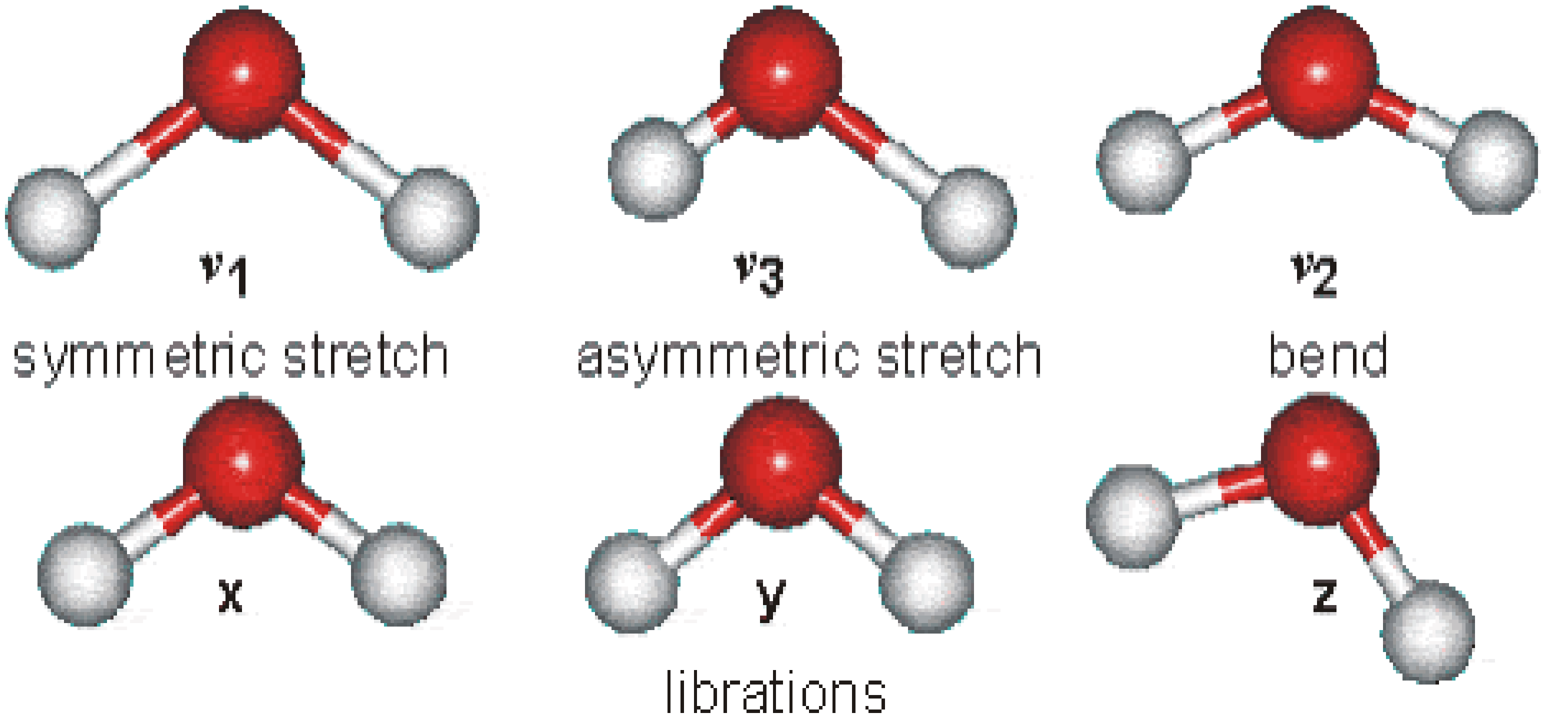
frequência alta: ~10^{14} - 10^{17} Hz





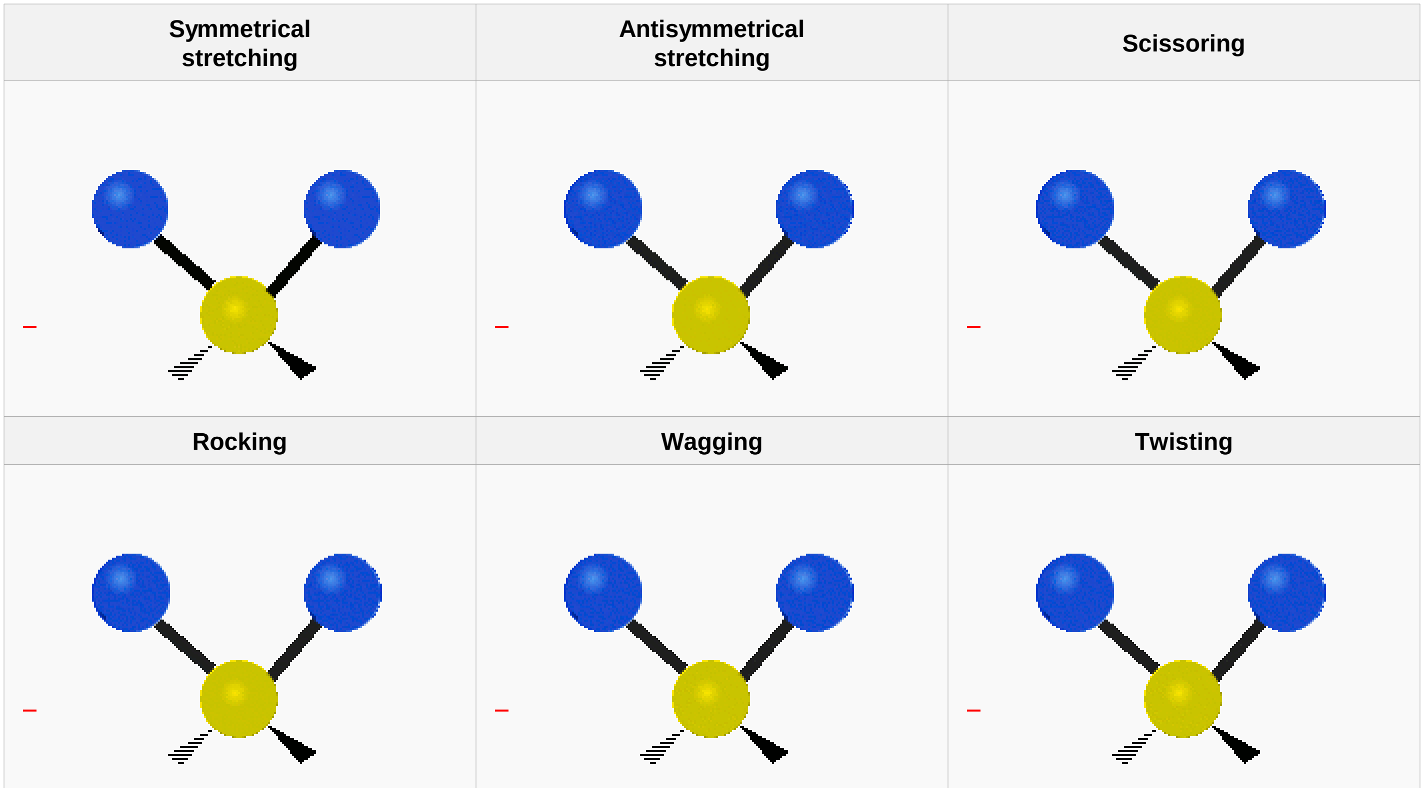
Os núcleos das moléculas vibram
frequência intermediária: ~10^{11} - 10^{13} Hz

Vibrações das moléculas de água



Ligações de átomos de carbono com hidrogénio são importantes na química da vida

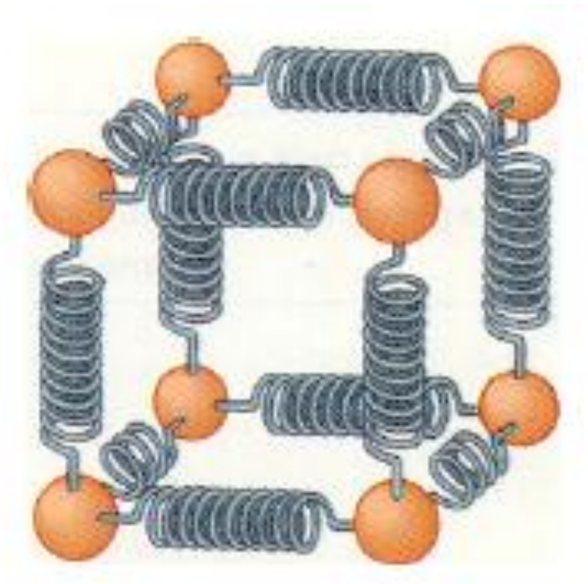
Vibrações CH_2

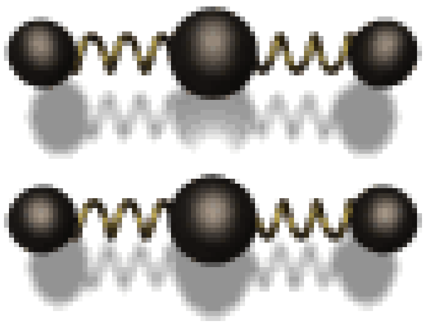


mais exemplos de movimento oscilatório

Os átomos num sólido não estão completamente imóveis.

Eles vibram com uma amplitude pequena em torno da sua posição de equilíbrio





MOVIMENTO PERIÓDICO

O movimento periódico é o movimento dum corpo que se repete regularmente

O corpo volta a uma dada posição depois dum certo intervalo de tempo fixo

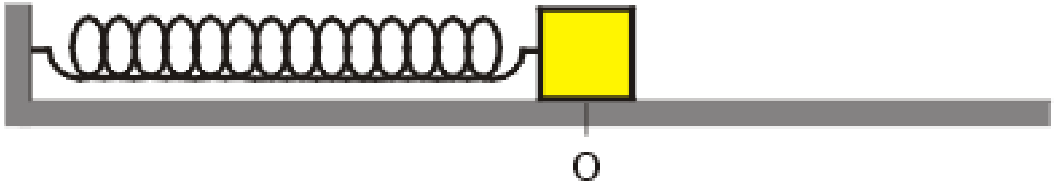
O MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS)

É um tipo de movimento periódico que acontece quando a força que age sobre a partícula

- **é proporcional ao deslocamento da partícula em relação a posição de equilíbrio**

- **e é dirigida sempre para a posição de equilíbrio**

$$F_s = -kx$$ $\rightarrow$ **Lei de Hooke**

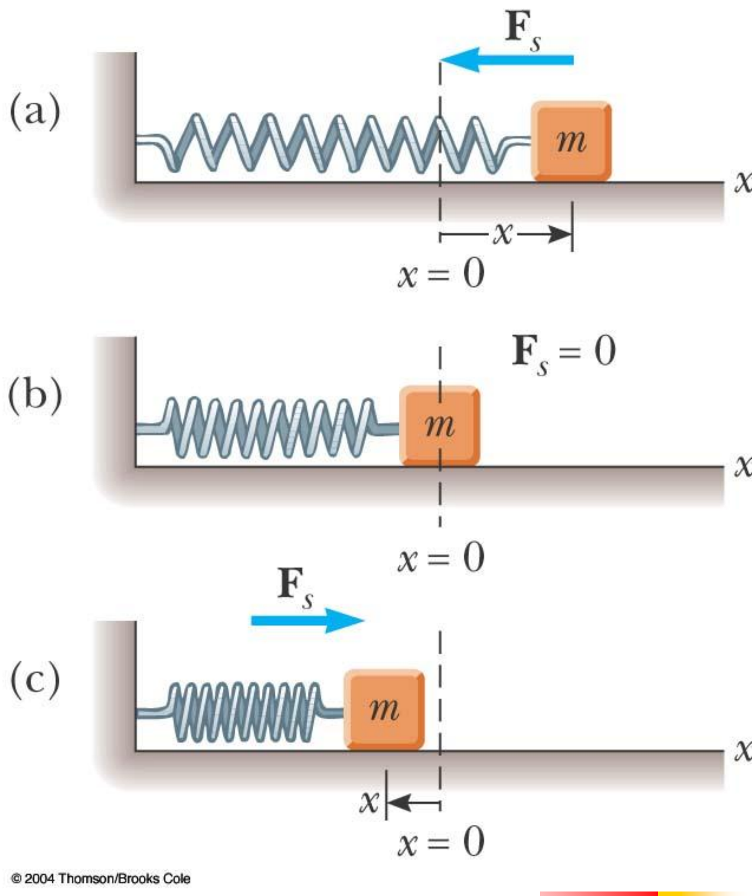


MOVIMENTO DO SISTEMA MASSA-MOLA (MHS)

Um bloco de massa *m* é ligado a uma mola

O bloco se desloca numa superfície horizontal sem atrito

Quando a mola não está esticada nem comprimida, o bloco está na **posição de equilíbrio** $x = 0$



Vimos anteriormente que pela Lei de Hooke que

$$F_s = -kx$$

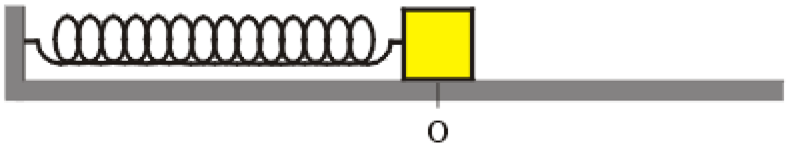
k é a constante elástica (N/m)

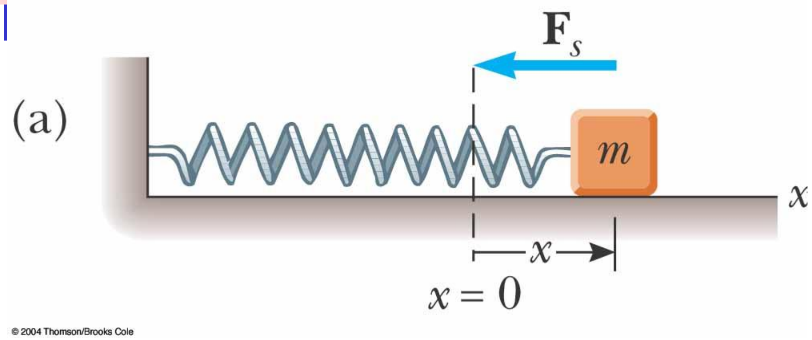
F_s $\rightarrow$ força restauradora

x $\rightarrow$ deslocamento

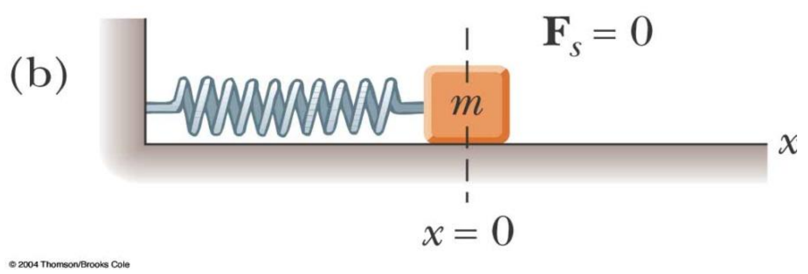
A força restauradora está sempre dirigida para o ponto de equilíbrio $\Rightarrow$ é sempre oposta ao deslocamento

O movimento do sistema massa-mola é um movimento harmónico simples

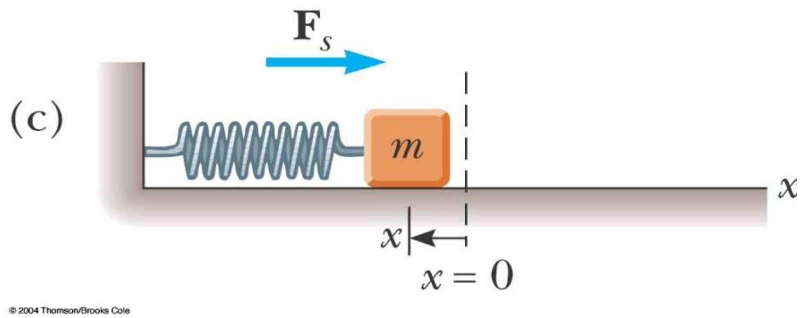




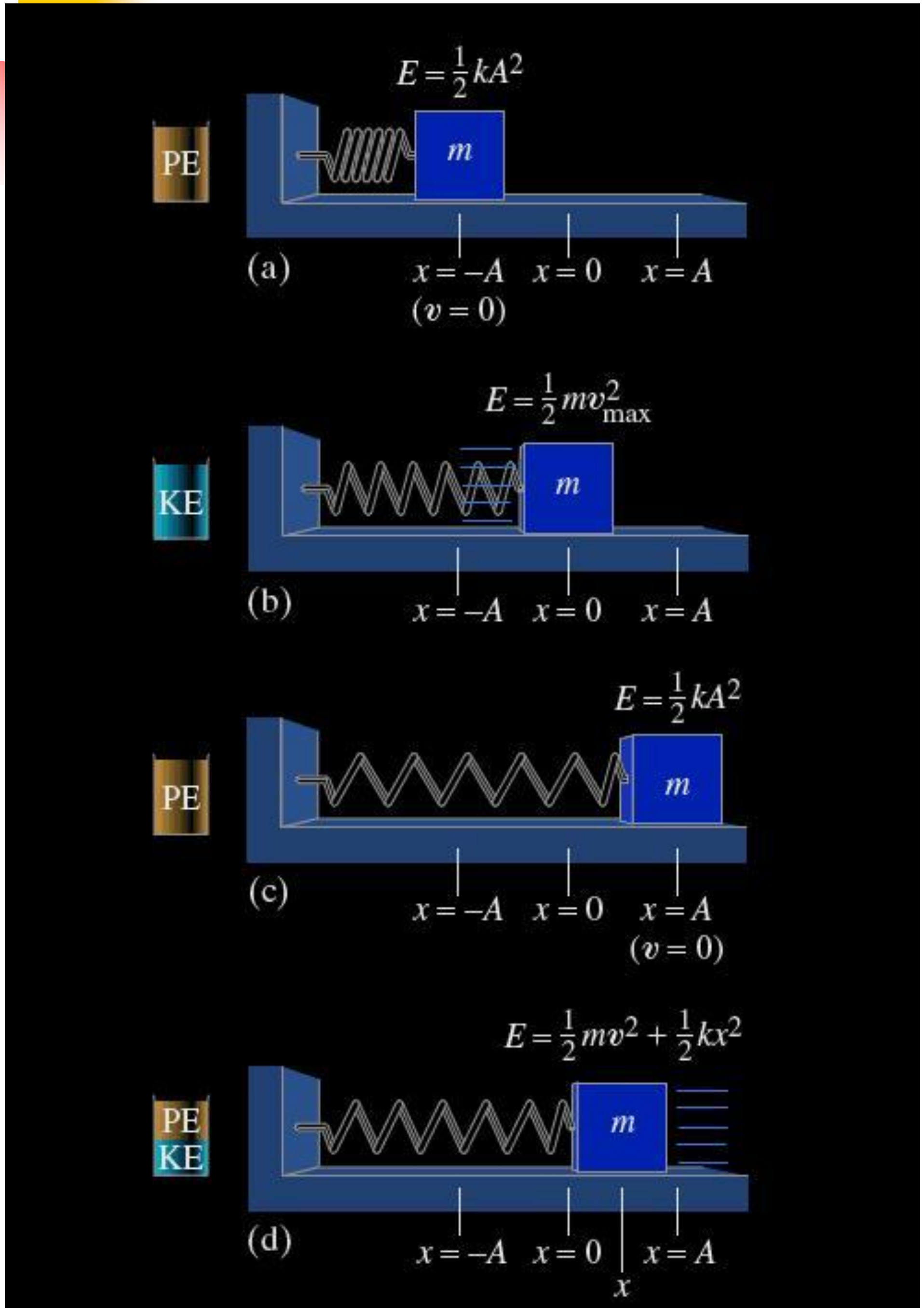
- **O bloco é deslocado para a direita de $x = 0$**
  - **A posição é positiva**
- **A força restauradora é dirigida para a esquerda**

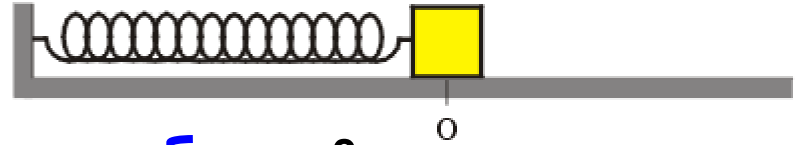


- **O bloco está na posição de equilíbrio $x = 0$**
- **A mola não está nem esticada nem comprimida**
- **A força é 0**



- **O bloco é deslocado para a esquerda de $x = 0$**
  - **A posição é negativa**
- **A força restauradora é dirigida para a direita**

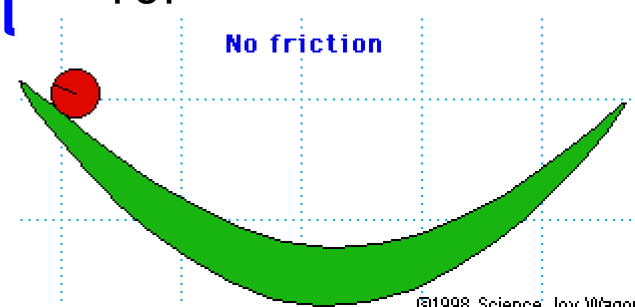




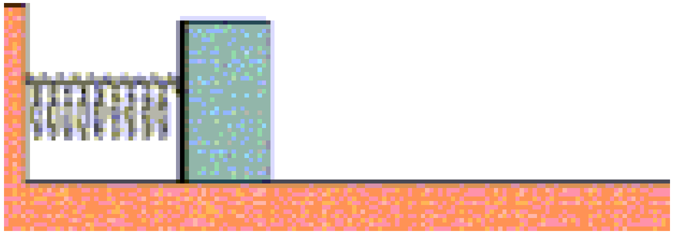
$x = -A$
- $v = 0$
- $a_{máx}$
- $E_C = 0$
- $E_{POT} \rightarrow$ **Máxima**

$x = 0$
- $V \rightarrow$ **Máxima**
- $a = 0$
- $E_C \rightarrow$ **Máxima**
- $E_{POT} = 0$

$x = A$
- $v = 0$
- $a_{máx}$
- $E_C = 0$
- $E_{POT} \rightarrow$ **Máxima**



ACELERAÇÃO



De acordo com a segunda lei de Newton

$$F_s = ma \Rightarrow -kx = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

A aceleração é proporcional ao deslocamento do bloco

O sentido da aceleração é oposto ao sentido do deslocamento (sinal menos)

Num corpo que se mova com um movimento harmónico simples (MHS), a aceleração é proporcional ao seu deslocamento mas tem um sentido oposto ao deslocamento

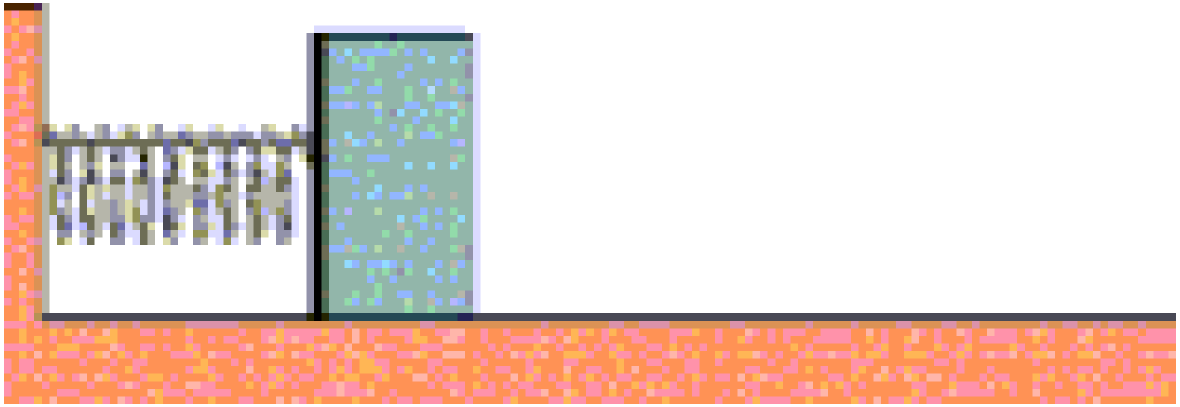
A aceleração não é constante $\Rightarrow$ as equações cinemáticas não podem ser aplicadas

Se o bloco é largado de uma posição x = *A*, então a aceleração inicial é $a = -\frac{k}{m}A$

O bloco continua até x = - *A* onde a sua aceleração é $a = \frac{k}{m}A$

Quando o bloco passa pelo ponto de equilíbrio, $a = 0$

MOVIMENTO DO BLOCO



O bloco continua a oscilar entre –*A* e +*A*

A força é conservativa

Na ausência de atrito, o movimento continua para sempre

Sistemas reais estão sujeitos a atrito, portanto não oscilam indefinidamente !

REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO MHS

Tratamos o bloco como sendo uma partícula

Escolhemos que a oscilação ocorre ao longo do eixo x

Aceleração $\rightarrow$ $$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$ $\rightarrow$ Definimos $$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \quad a = -\omega^2 x \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Precisamos de uma função que satisfaça a equação diferencial de segunda ordem

Procuramos uma função $x(t)$ cuja segunda derivada é a mesma que a função original com um sinal negativo e multiplicada por

AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SIN E COS RESPEITAM ESTES REQUISITOS !

Podemos construir uma solução com uma ou ambas as funções

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

A seguinte função cos é uma solução da equação

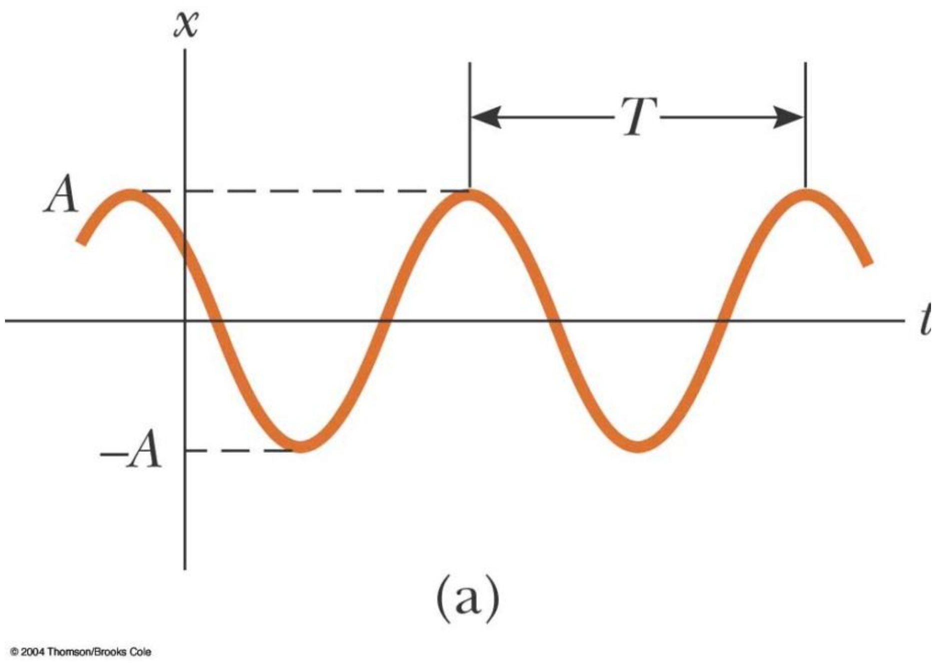
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

onde A, ω e ϕ são constantes

A é a amplitude do movimento$\rightarrow$ esta é a posição máxima da partícula quer na direção positiva quer na negativa

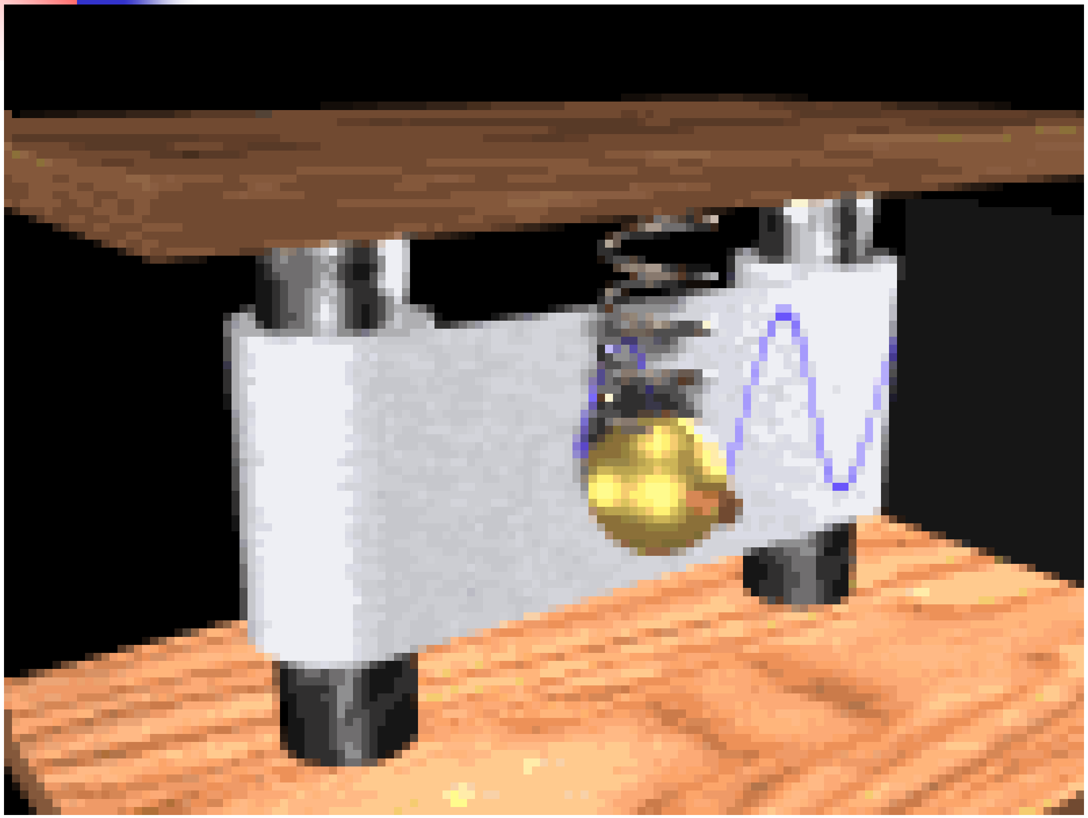
ω é a frequência angular
Unidade: rad/s

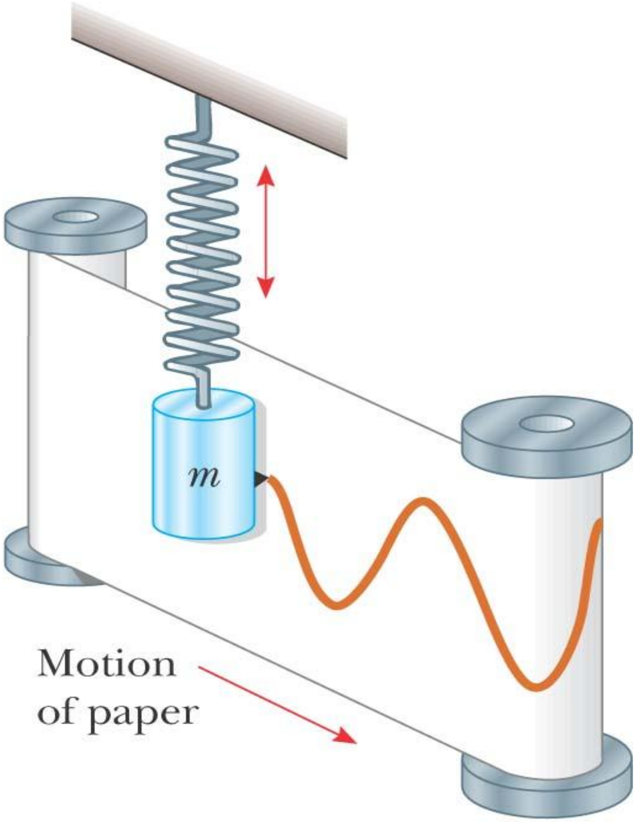
ϕ é a fase (constante) ou o ângulo de fase inicial



- Se a partícula está em $x = A$ para $t = 0$, então $\phi = 0$
- A fase do movimento é a quantidade $(\omega t + \phi)$
- $x(t)$ é períodica e o seu valor é o mesmo cada vez que ωt aumenta de 2π radianos

EXPERIÊNCIA

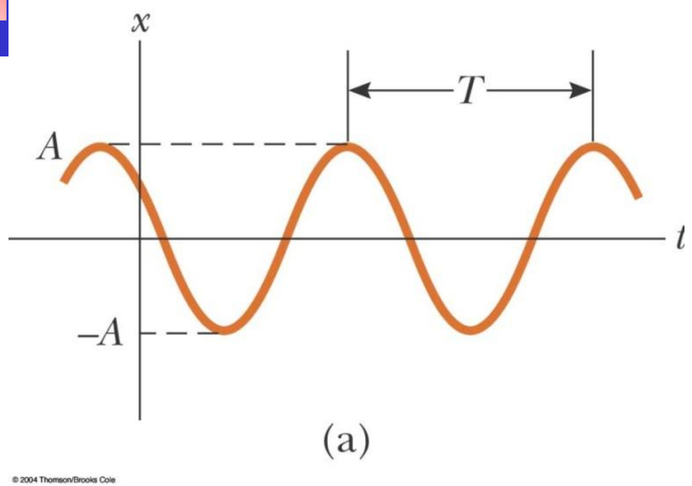




A caneta ligada ao corpo oscilante desenha uma curva sinusoidal no papel que está em movimento

Verifica-se assim a curva cosseno, considerada anteriormente

DEFINIÇÕES



- **O *período*, T, é o intervalo de tempo necessário para que a partícula faça um ciclo completo do seu movimento**

  Os valores de x e v da partícula no instante t são iguais aos valores de x e v em $t + T$

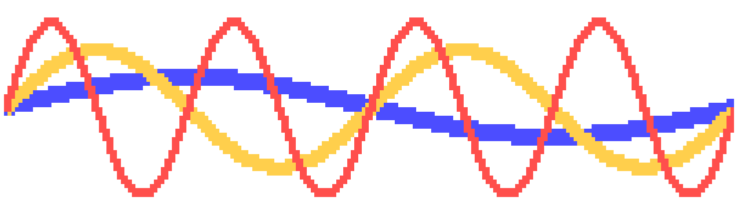
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

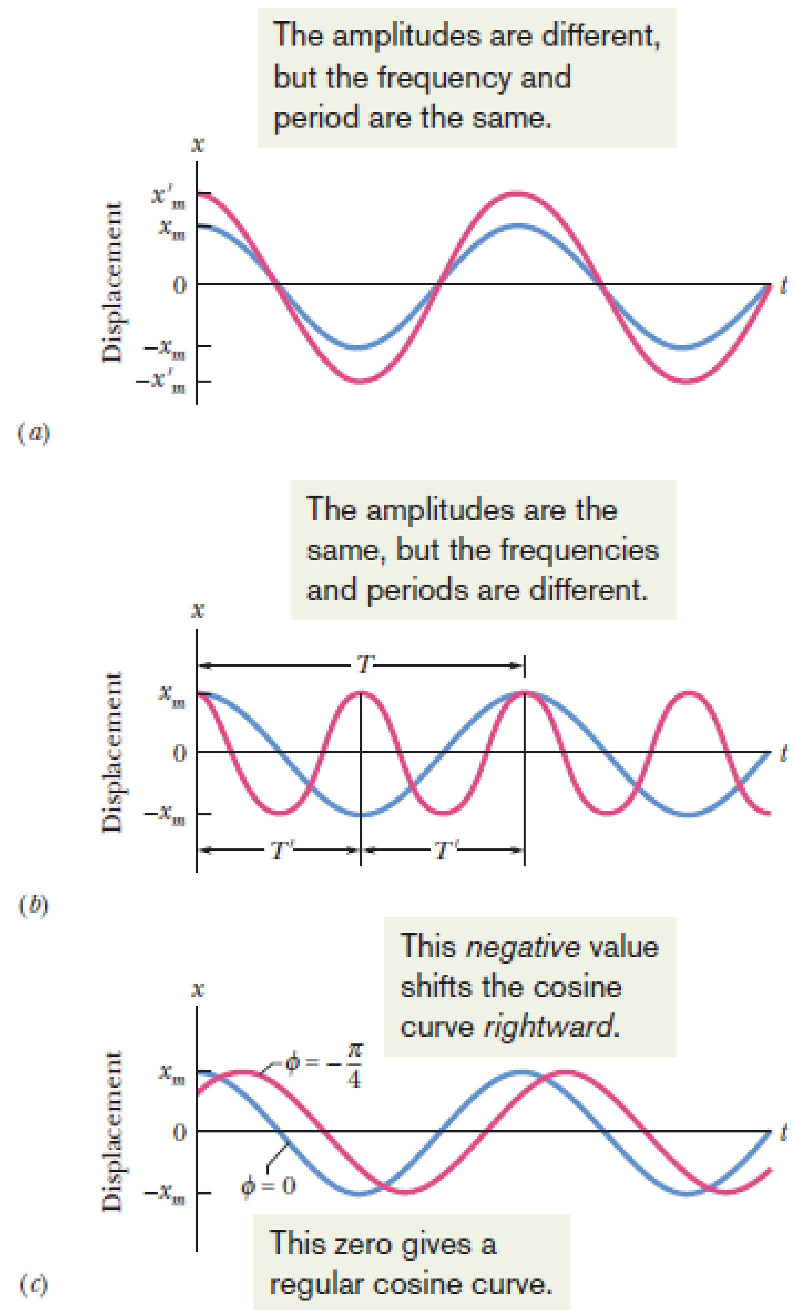
- **O inverso do período chama-se frequência**

  A frequência representa o nº de oscilações executadas pela partícula por unidade de tempo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

- **A unidade é o ciclo por segundo = hertz (Hz)**





The amplitudes are different, but the frequency and period are the same.
x
x'_m
x_m
0
$-x_m$
$-x'_m$
Displacement
t
(a)
The amplitudes are the same, but the frequencies and periods are different.
x
T
x_m
0
$-x_m$
Displacement
T'
T'
t
(b)
This *negative* value shifts the cosine curve *rightward*.
x
$\phi = -\frac{\pi}{4}$
x_m
0
$-x_m$
Displacement
$\phi = 0$
t
This zero gives a regular cosine curve.
(c)

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO NO MHS

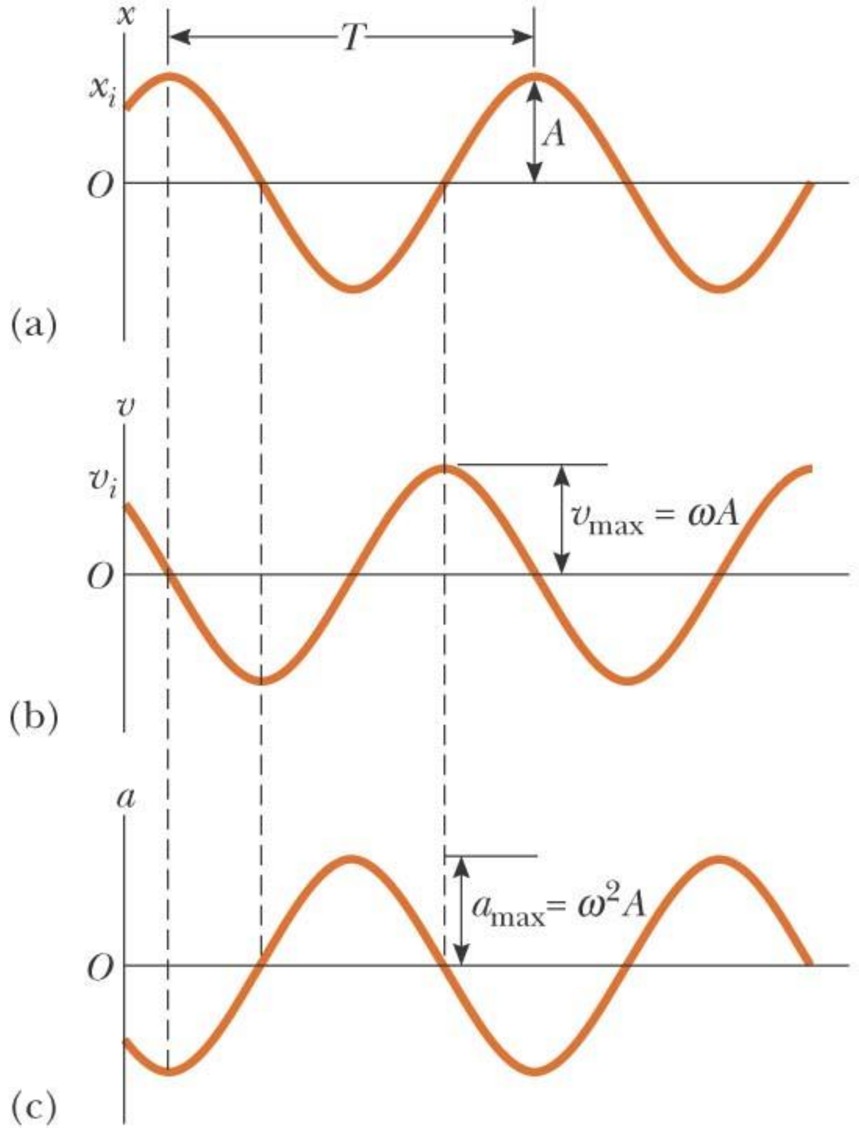
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

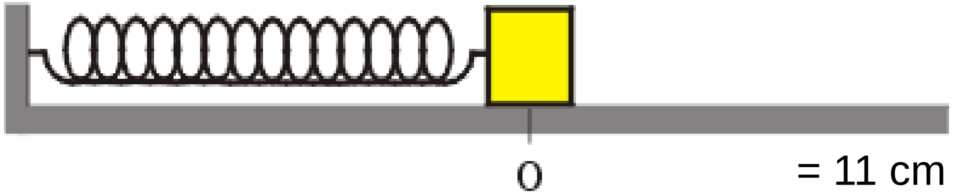
$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A$$

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A$$

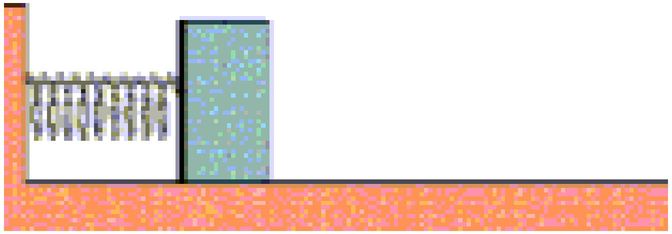


Exemplo 1- Um bloco cuja massa é 680 g está preso a uma mola cuja constante elástica k é de 65 N/m. O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância x = 11 cm a partir da posição de equilibrio em x = 0 e liberado a partir do repouso no instante t = 0.

a) Quais são a frequência angular, a frequência e o período do movimento resultante.
b) Qual é a amplitude das oscilações?
c) Qual é a velocidade maxíma v_m do bloco e onde se encontra o bloco quando tem esta velocidade.
d) Qual é o módulo da aceleração maxíma do bloco?
e) Qual é a constante de fase do movimento?
f) Qual é a função deslocamento x(t) do sistema bloco mola



ENERGIA NO MHS



Energia do sistema massa-mola

- **Energia cinética**

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m\big(-\omega A \sin(\omega t + \phi)\big)^2 =$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{k}{\omega^2} \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

onde $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow m = \dfrac{k}{\omega^2}$ **assim** $\boxed{K = \tfrac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)}$

- **Energia Potencial**

$$U = \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2} k\big(A\cos(\omega t + \phi)\big)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \tfrac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)}$$

- **Energia Mecânica**

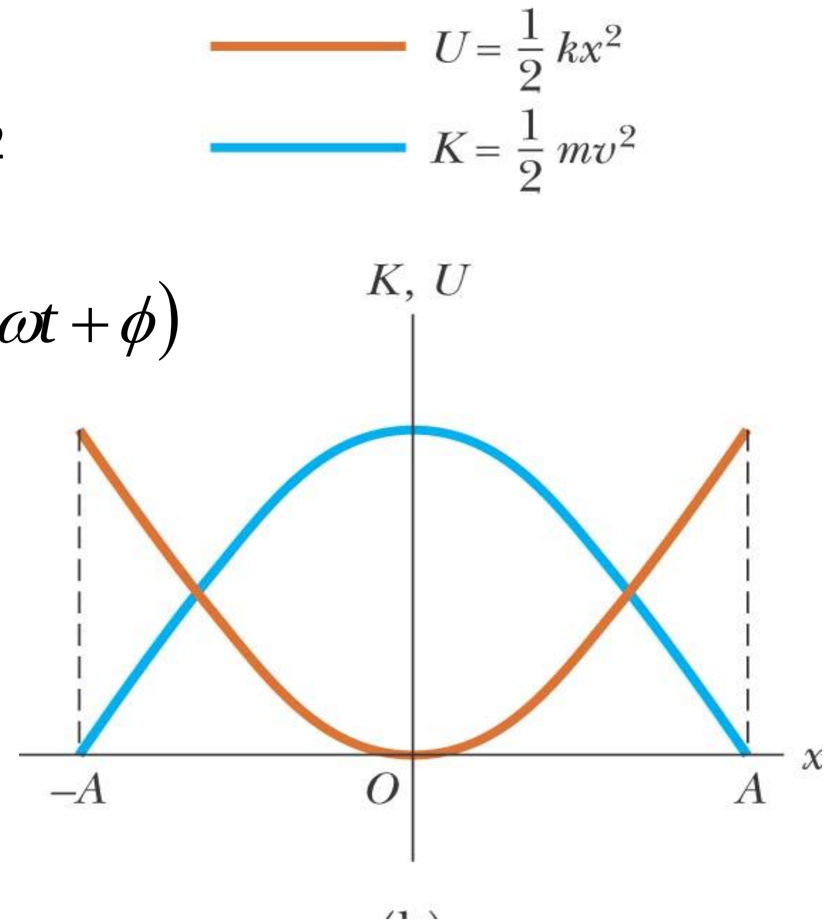
$$E_M = K + U =$$

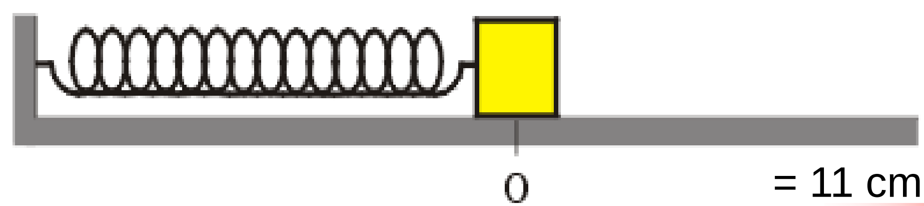
$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\tfrac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi) + \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

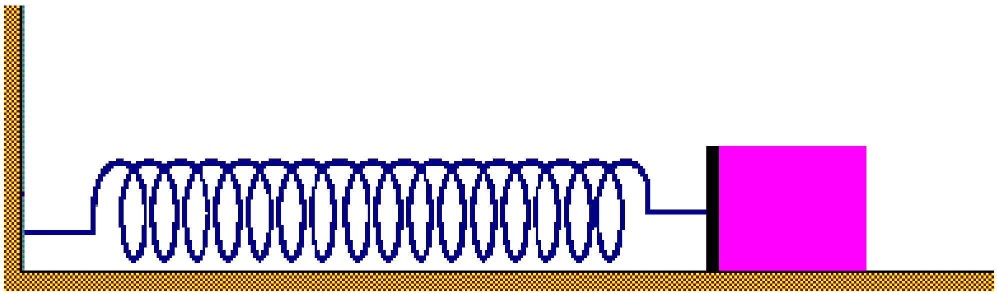
$$\Rightarrow$$

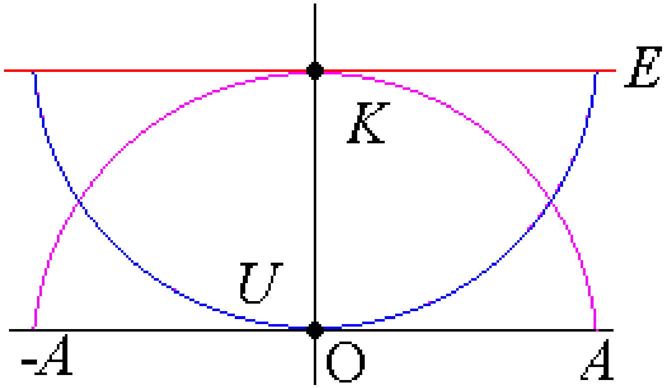
$$\boxed{E_M = \tfrac{1}{2}kA^2}$$





Conservação da Energia





$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

Exemplo 2- Um bloco de massa m= 680 g está preso a uma mola cuja constante elástica k é 65 N/m. O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância x = 11 cm a partir de sua posição de equilíbrio em x = 0 e liberado do repouso em t=0

a) Qual é a energia mecânica E do oscilador linear (inicialmente a posição do bloco é x = 11 cm e sua velocidade é v = 0).

b) Qual é a energia potencial U e a energia cinética K do oscilador quando o bloco estiver em $x = (1/2)x_m$? Quais são os valores destas energias quando o bloco estiver em $x = -(1/2)x_m$?.