1 Sintaxe da lógica proposicional

1.1 Gramática

Definição 1.1 (Sintaxe da Lógica Proposicional) *O conjunto das fórmulas proposicionais é o menor conjunto $\mathcal{P}$ tal que*

1. *Se X é uma letra proposicional, $\top$ ou $\bot$ então $X \in \mathcal{P}$.*

2. *Se $X \in \mathcal{P}$ então $\neg X \in \mathcal{P}$.*

3. *Se $X, Y \in \mathcal{P}$ então $(X \wedge Y) \in \mathcal{P}$, $(X \vee Y) \in \mathcal{P}$, $(X \rightarrow Y) \in \mathcal{P}$ e $(X \leftrightarrow Y) \in \mathcal{P}$.*

1.2 Fórmulas

Uma *fórmula* ou uma *fórmula bem formada* é qualquer elemento sintático construído a partir das regras da definição 1.1.

A regra 1 estabelece quais são as fórmulas mais simples que exitem na lógica proposicional: letras proposicionais (que representam proposições) e os símbolos que representam os valores lógicos verdadeiro ($\top$) e falso ($\bot$) são considerados fórmulas da lógica proposicional. As regras 2 e 3 mostram como fórmulas mais complexas podem ser (corretamente) construídas a partir de fórmulas mais simples. Particularmente, a regra 3 estabelece que a negação de uma fórmula da lógica proposicional também é uuma fórmula da lógica proposicional. A regra 3 estabelece que a conjunção de duas fórmula da lógica proposicional, quando rodeadas por parênteses, também é uma fórmula da lógica proposicional.

Da definição acima, sabemos que $\bot$ é uma fórmula da lógica proposicional (regra 1 da definição); igualmente sabemos que a letra proposicional p (que pode representar qualquer sentença à qual possa se atribuir um valor verdade) também é uma uma fórmula da lógica proposicional (regra 1 da definição); segundo a regra 3, como $\bot$ e p são fórmulas da lógica proposicional, então sua conjunção, rodeada por parênteses também é, ou seja, $(\bot \wedge p)$ é uma fórmula da lógica proposicional; segundo a regra 2, se tivermos uma fórmula da lógica proposicional, então sua negação também é uma fórmula da lógica proposicional, logo $\neg(\bot \wedge p)$ também é uma fórmula da lógica proposicional.

Note que $p \wedge q \vee \neg(\neg p \leftrightarrow q)$ não é uma fórmula da lógica proposicional, visto que não pode ser construída a partir das regras dadas na definição (Por que???).

Para facilitar a leitura, pode-se eliminar alguns parênteses introduzindo a noção de "prioridade" de operadores (mostrar a relação com a matemática e explicar como aquela também é uma definição arbitrária).

Usualmente, a prioridade dos operadores da lógica proposicional é dada pela seguinte tabela (dos menos prioritários para os mais prioritários).

$$\begin{array}{c} \vee \\ \wedge \\ \rightarrow \\ \leftrightarrow \\ \neg \end{array}$$

Como os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ são associativos (dar a definição) então também pode-se eliminar os parênteses ao redor das fórmulas. Assim $p \wedge q \wedge r$ também é considerada uma fórmula bem formada da lógica proposicional.

1.3 Árvores sintáticas

Explicar o que é o operador principal de uma fórmula e como uma fórmula pode ser representada por uma árvore sintática. Dar alguns exemplos.

1.4 Exercício

Formalize os seguintes enunciados, usando a interpretação para cada letra proposicional indicada na tabela abaixo. Para cada fórmula escrita, mostre a árvore sintática que representa a fórmula. Em cada nodo da árvore indique qual a regra da definição que foi usada para construir aquele nodo.

letra proposicional	significado atribuído
p	Paula vai à festa no sábado
s	Quincas vai à festa no sábado
r	Ricardo vai à festa no sábado
s	Sara vai à festa no sábado

1. Paula não vai à festa no sábado.
2. Paula vaià festa no sábado, mas Quincas não vai.
3. Se Paula for à festa no sábado então Quincas também irá.
4. Paula irá à festa no sábado se Quincas também for.
5. Paula irá à festa no sábado somente se Quincas também for.
6. Paula irá à festa no sábado se e somente se Quincas também for.
7. Nem Paula nem Quincas irão à festa no sábado.
8. Paula e Quincas não irão à festa no sábado.
9. Ou Paula vai à festa no sábado ou Quincas não vai à festa no sábado.
10. Paula não irá à festa no sábado se Quincas também for.
11. Ou Paula irá à festa no sábado ou então Ricardo e Quincas irão à festa no sábado.
12. Se Paula for à festa no sábado, então Ricardo e Quincas também irão.
13. Paula não irá à festa no sábado, mas Ricardo e Quincas irão.
14. Se Ricardo não for à festa no sábado então, se Paula também não for, Quincas irá.
15. Se sem Ricardo nem Quincas forem à festa no sábado, então Paula irá.

16. Ricardo irá somente se Paula e Quincas não forem à festa no sábado.

17. Ricardo e Quincas vão, apesar de Paula e Sara não irem à festa no sábado.

18. Se Ricardo ou Quincas forem à festa no sábado, então Paula irá e Sara não irá.

19. Ricardo e Quincas irão à festa no sábado se e somente se Paula for ou se Sara for.

20. Se Sara for à festa no sábado então Ricardo ou Paula irão e se Sara não for à festa no sábado então Paula e Quincas irão.

1.5 Avaliação

A lógica clássica é bivalorada, ou seja, toma valores de um domínio binário, cujos elementos representam os valores verdade *verdadeiro* e *falso*. Seja então o espaço dos valores verdade o conjunto $\mathcal{T} = \{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}$, onde naturalmente `v` representa o valor verdade *verdadeiro* e `f` representa o valor verdade *falso*.

Definição 1.2 (Avaliação) *Uma avaliação booleana é um mapeamento ν do conjunto de fórmulas proposicionais no conjunto de valores verdade $\mathcal{T} = \{\mathtt{v},\mathtt{f}\}$ tal que:*

1. $\nu(\top) = \mathtt{v}$, $\nu(\bot) = \mathtt{f}$,

2. $\nu(\neg X) = \neg\nu(X)$ *e*

3. $\nu(X \circ Y) = \nu(X) \circ \nu(Y)$.

onde $\circ$ representa qualquer um dos conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$.

Exemplo 1.1 *Suponha uma fórmula contendo três letras proposicionais, p, q e r, onde $\nu(p) = \mathtt{v}$, $\nu(q) = \mathtt{f}$ e $\nu(r) = \mathtt{f}$. A avaliação da fórmula $\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow r$ é realizada da seguinte forma (segundo a definição 1.2):*

$$
\begin{aligned}
\nu(\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow r) &= \nu(\neg(p \wedge \neg q)) \rightarrow \nu(r) \\
&= \neg(\nu(p \wedge \neg q)) \rightarrow \nu(r) \\
&= \neg(\nu(p) \wedge \nu(\neg q)) \rightarrow \nu(r) \\
&= \neg(\nu(p) \wedge \neg\nu(q)) \rightarrow \nu(r) \\
&= \neg(\mathtt{v} \wedge \neg\mathtt{f}) \rightarrow \mathtt{f} \\
&= \neg(\mathtt{v} \wedge \mathtt{v}) \rightarrow \mathtt{f} \\
&= \neg(\mathtt{v}) \rightarrow \mathtt{f} \\
&= \mathtt{f} \rightarrow \mathtt{f} \\
&= \mathtt{v}
\end{aligned}
$$

2 Argumentos

premissas e conclusão;

(abaixo está o símbolo □ mas devia ser os três pontinhos que denotam conclusão...)

Exemplo 2.1

- *Se o avião chegar atrasado e não houver táxis no aeroporto, então João chegará atrasado para sua reunião.*

- *João não chegou atrasado à reunião, mas seu avião chegou atrasado.*

- $\square$ *Portanto, havia táxis no aeroporto.*

Formalização desse argumento:

$$
\begin{array}{l}
(a \wedge \neg t) \rightarrow r \\
\neg r \wedge a \\
\square t
\end{array}
$$

Exemplo 2.2

- *Se estiver chovendo e Maria não tiver levado sua sombrinha ela irá se molhar.*

- *Maria não se molhou, apesar de estar chovendo.*

- $\square$ *Maria levou sua sombrinha com ela.*

ormalização desse argumento:

$$
\begin{array}{l}
(c \wedge \neg s) \rightarrow m \\
\neg m \wedge c \\
\square s
\end{array}
$$

Formas de argumento: argumentos aparentemente diferentes possuem exatamente a mesma estrutura. Nesse caso, como os dos argumentos possuem as mesmas premissas e as mesmas conclusões, um deles é válido se e somente se o outro for. Sendo assim, a lógica matemática está interessada mais nas formas de argumento e na sua validade do que propriamente no signficado das proposições envolvidas.

Definição 2.1 (Conseqüência lógica) *Diz-se que uma fórmula lógica ψ é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas lógicas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ se e somente se ψ é verdadeira sempre que todas as fórmulas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ forem verdadeiras. Nesse caso, escreve-se que*

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$$

Definição 2.2 (Argumento válido) *Um argumento é dito válido sempre que sua conclusão for conseqüência lógica de suas premissas.*

Verificação de validade dos argumentos da lógica proposicional: tabelas verdade.

Exemplo 2.3 *Verificar se*

$$(c \wedge \neg s) \to m, \neg m \wedge c \models s$$

é um argumento válido.

c	s	m	$(c \wedge \neg s) \to m$	$\neg m \wedge c$	s
v	v	v	v	f	v
v	v	f	v	v	v
v	f	v	v	f	f
v	f	f	f	v	f
f	v	v	v	f	v
f	v	f	v	f	v
f	f	v	v	f	f
f	f	f	v	f	f

Exemplo 2.4 *Verificar se*

$$a \vee (\neg b \to c) \models \neg a \to (\neg b \wedge \neg c)$$

é um argumento válido.

a	b	c	$a \vee (\neg b \to c)$	$\neg a \to (\neg b \wedge \neg c)$
v	v	v	v ∨ (f → v) = v	f → (f ∧ f) = v
v	v	f	v ∨ (f → f) = v	f → (f ∧ v) = v
v	f	v	v ∨ (v → v) = v	f → (v ∧ f) = v
v	f	f	v ∨ (v → f) = v	f → (v ∧ v) = v
f	v	v	f ∨ (f → v) = v	v → (f ∧ f) = f
f	v	f	f ∨ (f → f) = v	v → (f ∧ v) = f
f	f	v	f ∨ (v → v) = v	v → (v ∧ f) = f
f	f	f	f ∨ (v → f) = f	v → (v ∧ v) = v

ou seja, o argumento é ***inválido****: nas linhas* 5*,* 6 e 7 *da tabela a premissa é verdadeira mas a conclusão é falsa.*

Os contra-exemplos são as atribuições que constam em cada uma dessas linhas: Na linha 5 a atribuição é $a = f$*,* $b = v$ *e* $c = v$*. Para essa atribuição, vê-se que a avaliação da premissa* $a \vee (\neg b \to c)$*,* $\upsilon(a \vee (\neg b \to c))$*, sob essa atribuição é*

$$\begin{aligned}
\upsilon(a \vee (\neg b \to c)) &= \upsilon(a) \vee \upsilon(\neg b \to c)) \\
&= \upsilon(a) \vee \upsilon(\neg b \to c)) \\
&= \upsilon(a) \vee (\upsilon(\neg b) \to \upsilon(c)) \\
&= \upsilon(a) \vee (\neg \upsilon(b) \to \upsilon(c)) \\
&= \mathrm{f} \vee (\neg \mathrm{v} \to \mathrm{v}) \\
&= \mathrm{f} \vee (\mathrm{f} \to \mathrm{v}) \\
&= \mathrm{f} \vee \mathrm{v} \\
&= \mathrm{v}
\end{aligned}$$

enquanto que a avaliação da conclusão, sob essa mesma atribuição é

$$
\begin{aligned}
\upsilon(\neg a \to (\neg b \wedge \neg c)) &= \upsilon(\neg a) \to \upsilon(\neg b \wedge \neg c)\\
&= \neg\upsilon(a) \to (\upsilon(\neg b) \wedge \upsilon(\neg c))\\
&= \neg\upsilon(a) \to (\neg\upsilon(b) \wedge \neg\upsilon(c))\\
&= \neg \mathrm{f} \to (\neg \mathrm{v} \wedge \neg \mathrm{v})\\
&= \mathrm{v} \to (\mathrm{f} \wedge \mathrm{f})\\
&= \mathrm{v} \to \mathrm{f}\\
&= \mathrm{f}
\end{aligned}
$$

Para as linhas 6 e 7 da tabela o procedimento é o mesmo, verificando-se que essas três atribuições são contra-exemplos (tornam a premissa verdadeira e a conclusão falsa).

2.1 Exercício

Formalize os seguintes argumentos, usando a interpretação para cada letra proposicional conforme indicado na tabela abaixo. Para cada argumento formalizado, verifique sua validade.

letra proposicional	significado atribuído
c	a conclusão desse argumento é verdadeira.
p	as premissas deste argumento são verdadeiras
s	este argumento é correto.
v	este argumento é válido.

1. Este argumento não é incorreto. Portanto, esse argumento é correto.

2. Este argumento é correto. Portanto, este argumento não é incorreto.

3. Se este argumento for correto então ele é válido. Como o argumento não é válido, conclui-se que não é correto.

4. Se este arugmenot for correto, então ele não será inválido. Ele é correto. Logo, ele é válido.

5. Se este argumento for correto, então ele não será inválido. Assim, se ele for inválido, então ele será incorreto.

6. Este argumento é correto e válido. Portanto ele é correto ou é inválido.

7. Este argumento não é, simultaneamente, correto e inválido. Ele é correto,portanto ele é válido.

8. Este argumento é correto se e somente se todas as suas premissas forem verdadeiras. Mas nem todas as suas premissas são verdadeiras. Logo, o argumento é incorreto.

9. Se a conclusão dessa argumento for falsa então este argumento é incorreto. Sendo assim, não é verdade que este argumento é correto e sua conlcusão é falsa.

10. Se este argumento for incorreto e válido então nem todas as suas premissas são verdadeiras. Todas as premissas do argumento são verdadeiras e o argumento é válido. Logo, ele é correto.

11. Se este argumento for válido e todas as suas premissas forem verdaderias, então ele será correto. Se ele for correto então sua conlcusão será verdadeira. Todas as suas premissas são verdadeiras. Portanto, se esse argumento for válido, sua conlcusão será verdadeira.

12. Ou este argumento é incorreto ou (se não for o caso) ele é válido e todas as suas premissas são verdadeiras. De onde se conlcui que ele é incorreto ou é válido.

13. Este argumento é correto se e somente se for válido e todas as suas premissas forem verdadeiras. Daí, se ele for válido, ele será correto se todas as suas premissas forem verdadeiras.

14. Este argumento será incorreto somente se nem todas as suas premissas forem verdadeiras ou se ele for inválido. Mas como ele é válido e todas as suas premissas são verdadeiras, ele é correto.