

# 4. Superfícies e sólidos geométricos

---

Geometria Descritiva  
2006/2007

# 4.1 Classificação das superfícies e sólidos geométricos

---

Geometria Descritiva  
2006/2007

# Classificação das superfícies

---

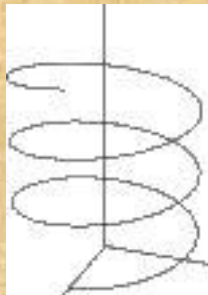
## ■ Linha

- Lugar das sucessivas posições de um ponto móvel
- Linha **recta**
  - O ponto móvel mantém uma direcção constante
- Linha **curva**
  - O direcção do movimento do ponto varia constantemente
  - **Curva geométrica**
    - A direcção do movimento varia segundo uma lei determinada e contínua
  - **Curva gráfica**
    - A direcção do movimento varia de uma forma arbitrária

# Classificação das superfícies

---

- Linha curva **plana**
  - O ponto móvel mantém-se sobre o mesmo plano
  - Exemplos:
    - Linha recta, circunferência, elipse,...
- Linha curva **torsa**, **empenada** ou de **dupla curvatura**
  - O ponto móvel afasta-se do plano definido por três quaisquer das suas posições
  - Exemplos:
    - Hélices



# Classificação das superfícies

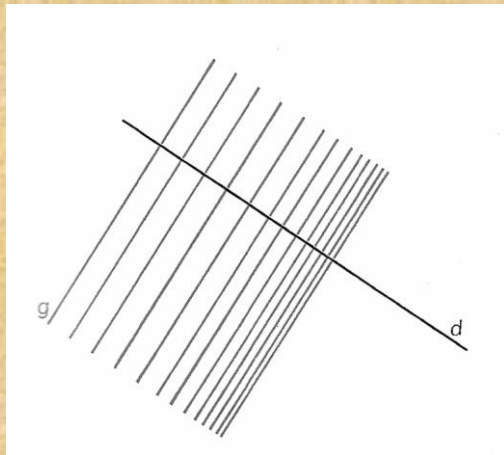
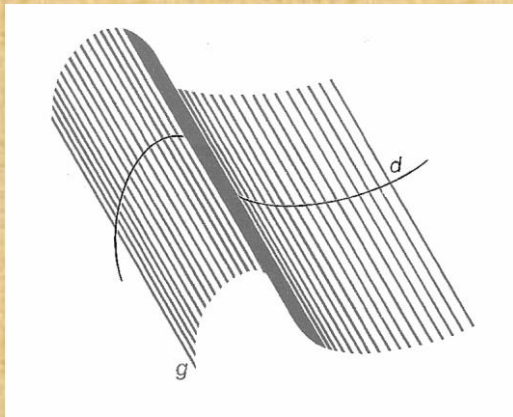
---

## ■ Superfícies

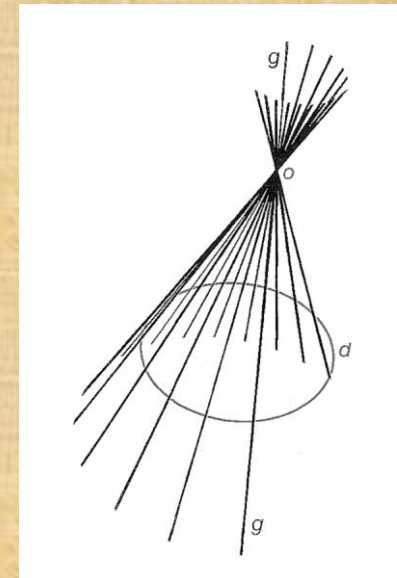
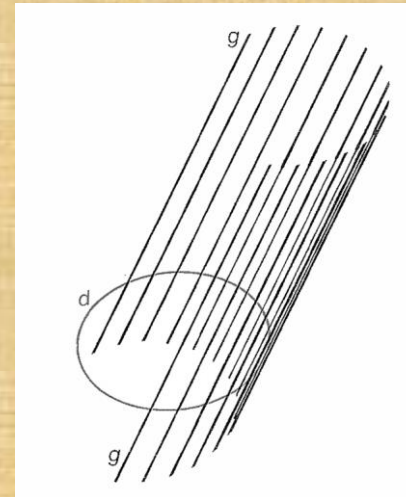
- Superfície de um corpo
  - Conjunto de pontos que separam os pontos do espaço que pertencem ao corpo dos pontos do espaço que não lhe pertencem
- As superfícies são geradas pelo movimento de linhas deformáveis ou indeformáveis - **geratrizes** da superfície
- As geratrizes podem apoiar-se sobre uma ou mais linhas – **directrizes** da superfície
  - Se a directriz é uma linha aberta gera uma superfície aberta
  - Se a directriz é uma linha fechada gera uma superfície fechada

# Classificação das superfícies

## Superfícies **abertas**



## Superfícies **fechadas**



# Classificação das superfícies

---

## ■ Superfícies **geométricas**

- A geratriz e a directriz da superfície são **curvas geométricas**
- O movimento da geratriz obedece a uma **lei** determinada e contínua

## ■ Superfícies **irregulares**

- Não satisfazem as condições a que obedecem as superfícies geométricas
  - Ex: Superfícies topográficas
-

# Classificação das superfícies

---

## ■ Superfícies geométricas

### ■ Regradadas

- A geratriz é uma linha recta

### ■ Planificáveis

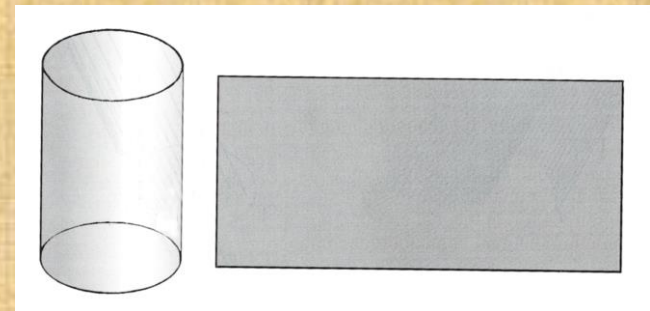
- Podem ser desenroladas numa superfície plana sem cortes ou enrugamentos

### ■ Empenadas

- Superfície regradada que não é possível planificar

### ■ Não regradadas

- A geratriz não é uma linha recta



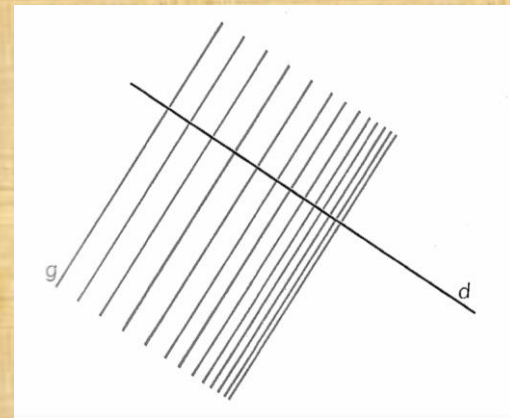


# Classificação das superfícies

## ■ Superfícies **regradas planificáveis**

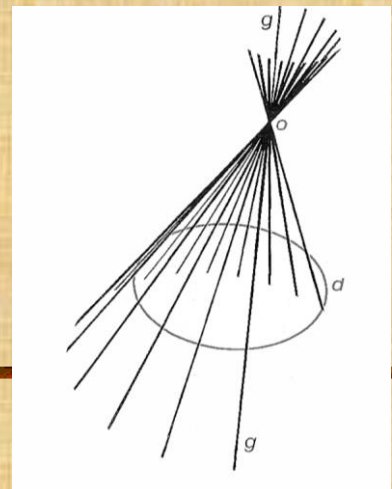
### ■ Superfície **plana**

- Gerada pelo movimento de uma recta (**geratriz**) paralelamente a si própria e apoiando-se constantemente numa recta fixa (**directriz**)



### ■ Superfície **cónica**

- Gerada pelo movimento de uma recta (**geratriz**) que tem um ponto fixo (**vértice** da superfície) e apoiando-se constantemente numa linha fixa (**directriz**)

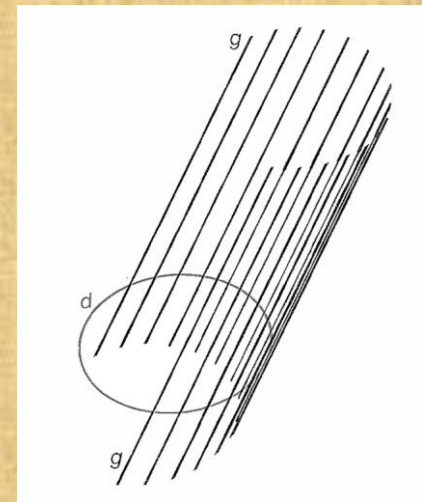


# Classificação das superfícies

## ■ Superfícies **regradas planificáveis**

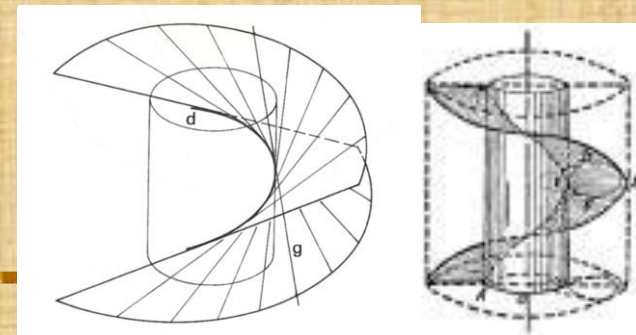
### ■ Superfície **cilíndrica**

- Gerada pelo movimento de uma recta (**geratriz**) paralelamente a si própria e apoiando-se constantemente numa linha fixa (**directriz**)



### ■ **Helicóide planificável**

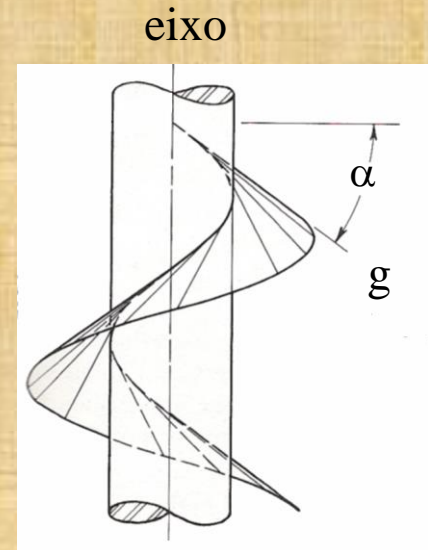
- Gerada pelo movimento da tangente a uma hélice cilíndrica (**geratriz**) quando o ponto de contacto se desloca sobre a hélice (**directriz**)



# Classificação das superfícies

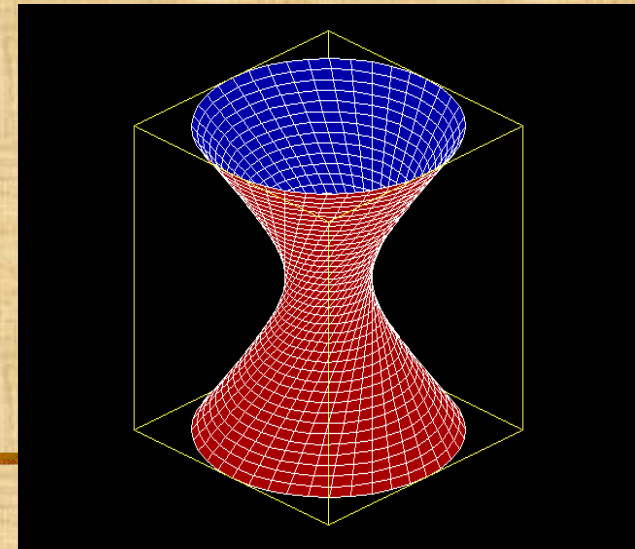
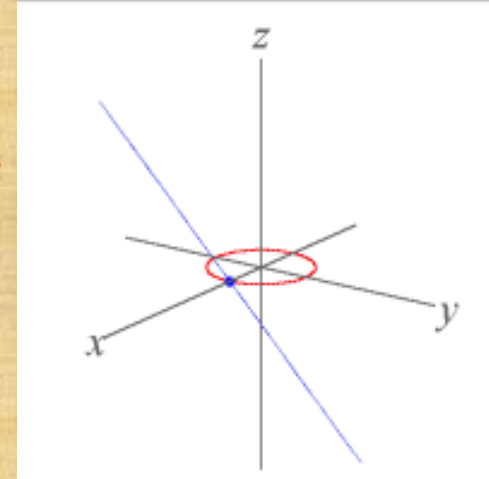
- Superfícies **regradas empenadas**
  - **Helicóide empenado**

- Gerada pelo movimento de uma recta (**geratriz**) que se apoia sobre uma **hélice cilíndrica** e mantém uma distância fixa ao eixo desta mantendo constante o ângulo entre a geratriz e o eixo



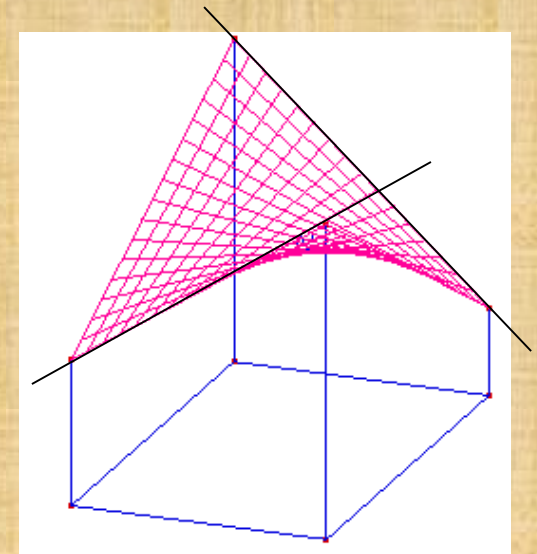
# Classificação das superfícies

- Superfícies **regradas empenadas**
  - **Hiperbolóide de uma folha**
    - Gerado pelo movimento de uma recta (**geratriz**) que se apoia sobre três rectas **enviesadas** duas a duas
      - Secções planas elípticas e hiperbólicas



# Classificação das superfícies

- Superfícies **regradas empenadas**
  - **Parabolóide hiperbólico**
    - Gerado pelo movimento de uma recta (**geratriz**) que se apoia sobre duas rectas **enviesadas** e se mantém **paralela** a um plano fixo (**plano director** da superfície)
      - Secções planas parabólicas e hiperbólicas



# Classificação das superfícies

---

- Superfícies **de revolução**
  - São geradas pelo movimento de uma linha (**geratriz**) em torno de uma recta fixa (**eixo da superfície**), mantendo constante a distância de cada ponto da geratriz ao eixo da superfície.
  - Cada ponto da geratriz gera uma circunferência a que se chama **paralelo da superfície**
    - Cada paralelo tem o seu centro no eixo e é-lhe **perpendicular**
    - O paralelo de menor raio é o **círculo de gola**
    - O paralelo de maior raio é o **equador**

# Classificação das superfícies

---

- Superfícies **de revolução**
  - Os planos que contêm o eixo da superfície são os **planos meridianos**
  - A intersecção dos planos meridianos com a superfície são as **meridianas da superfície**
    - As linhas meridianas paralelas a um dos planos de projecção são as **meridianas principais**
  - As superfícies de revolução podem sempre ser geradas por uma sua meridiana

# Classificação das superfícies

## ■ Superfícies de revolução

### ■ Regradas (são apenas três)

#### ■ Cone de revolução

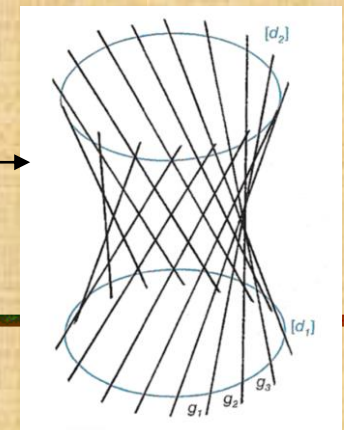
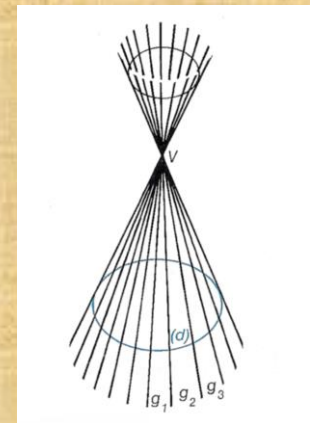
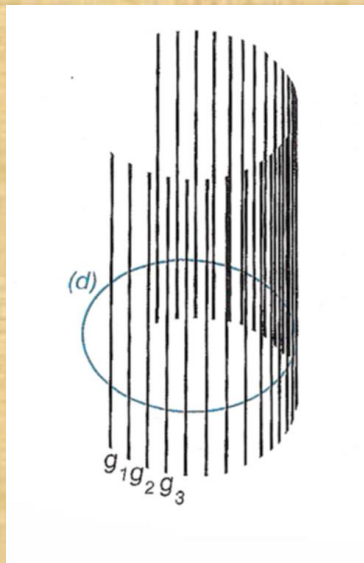
■ A geratriz e o eixo são concorrentes

#### ■ Cilindro de revolução

■ A geratriz e o eixo são paralelos

#### ■ Superfície empenada de revolução

■ A geratriz e o eixo são enviesados





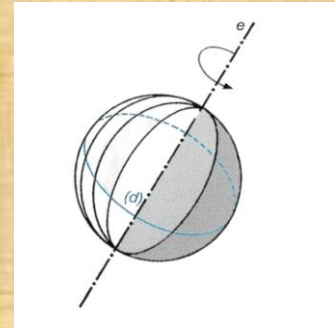
# Classificação das superfícies

## ■ Superfícies de revolução

### ■ Não regradas

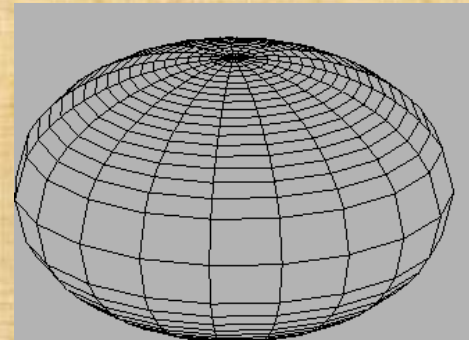
#### ■ Esfera

- Gerada pela rotação de uma circunferência em torno de um seu diâmetro

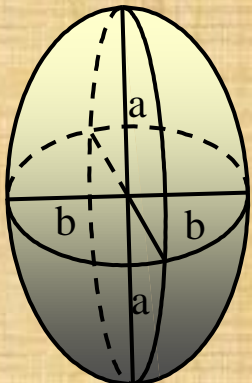


#### ■ Elipsóide de revolução

- Gerada pela rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos
- Elipsóide alongado
- Elipsóide achatado

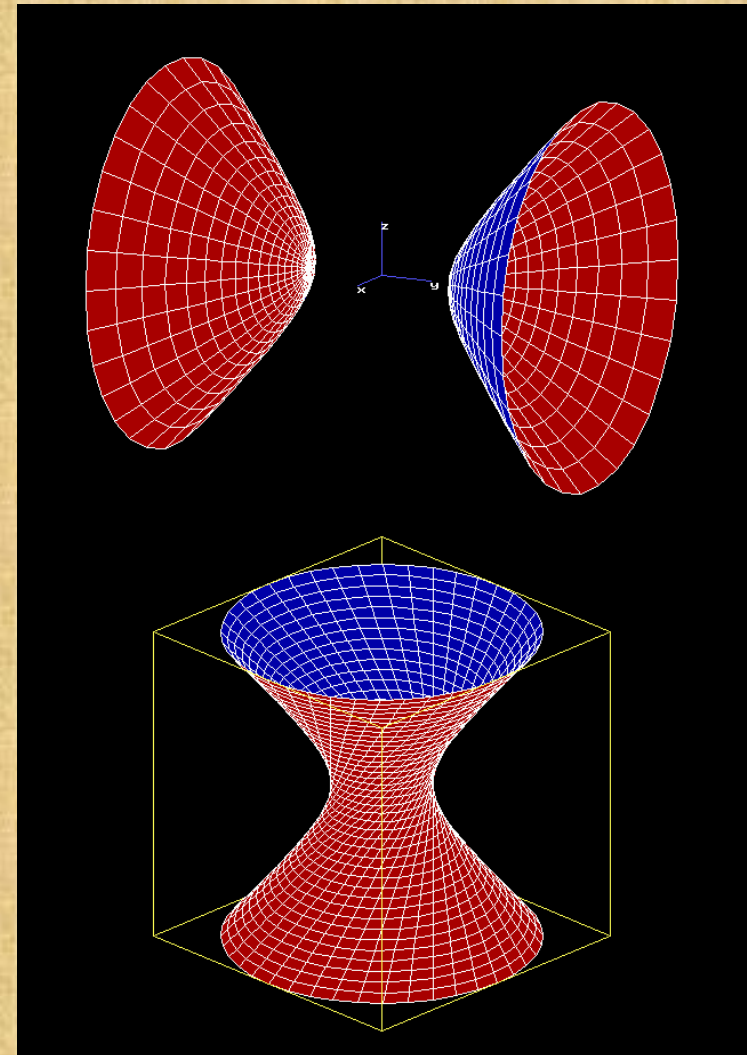


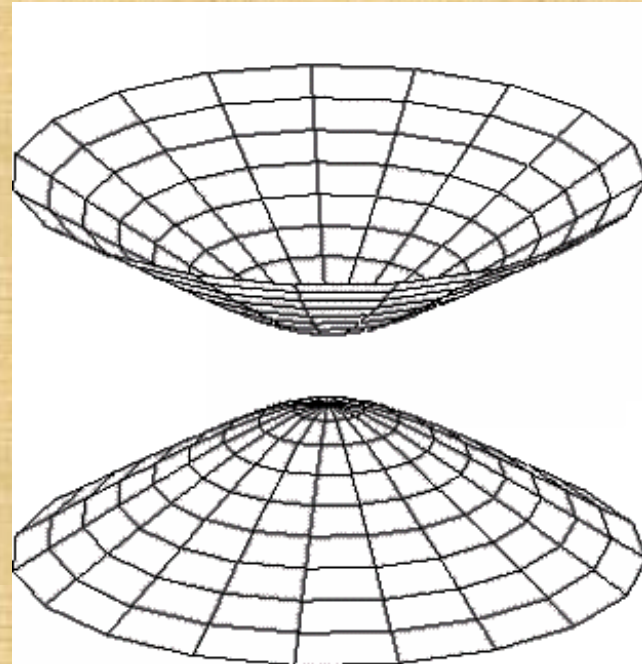
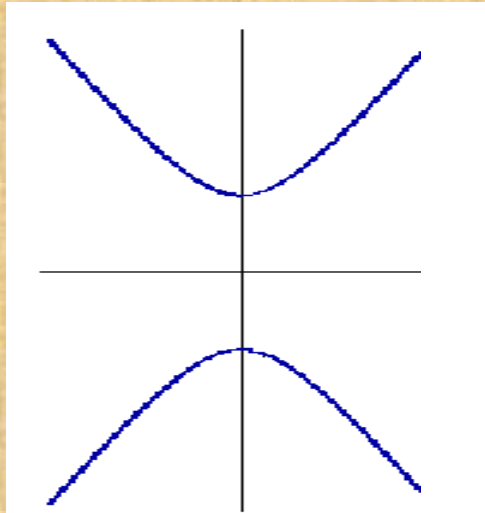
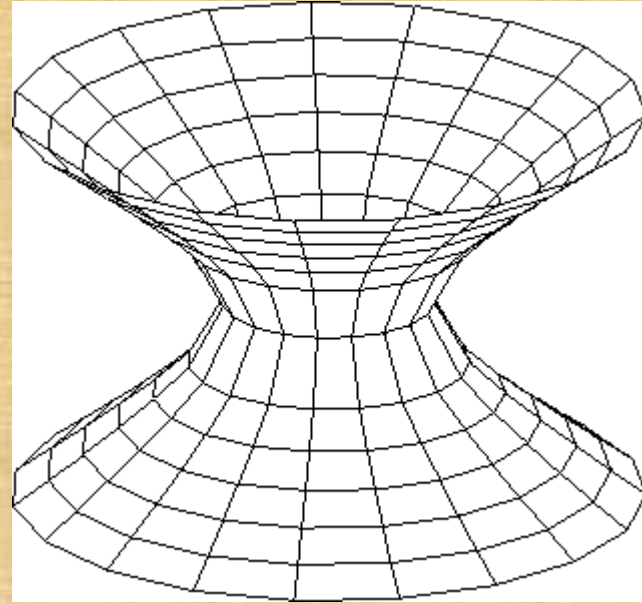
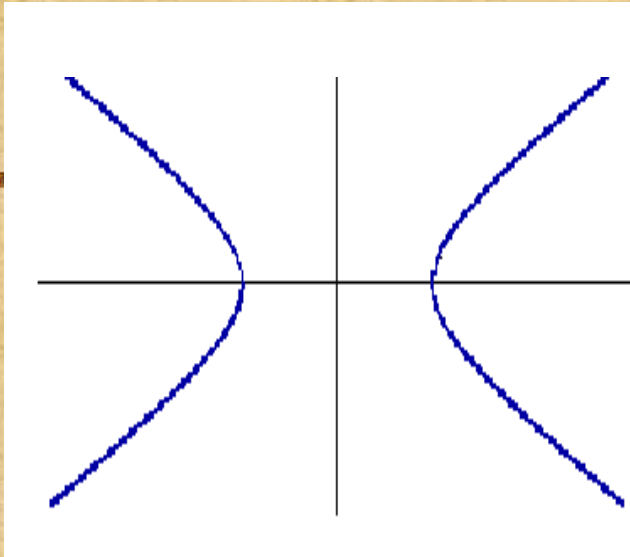
a - semi-eixo maior  
b - semi-eixo menor



# Classificação das superfícies

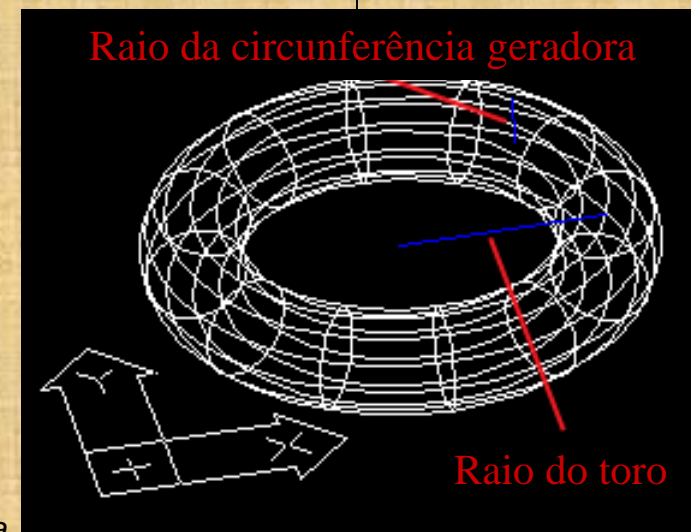
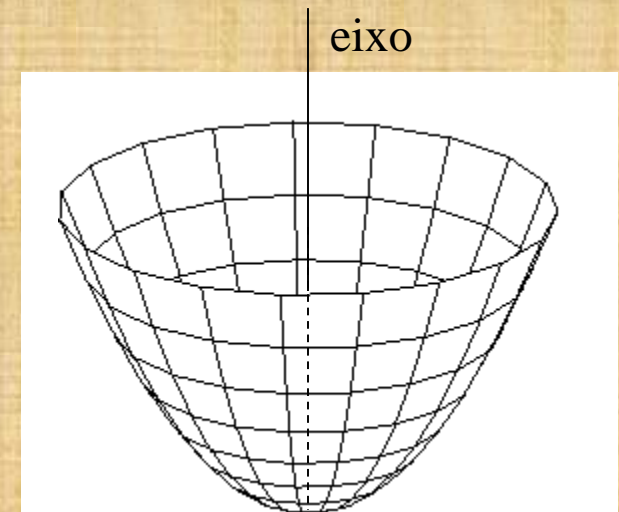
- Superfícies de revolução
  - Não regradas
    - Hiperbolóide de revolução
      - Gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de um dos seus eixos
      - Hiperbolóide de revolução de duas folhas
      - Hiperbolóide de revolução de uma folha





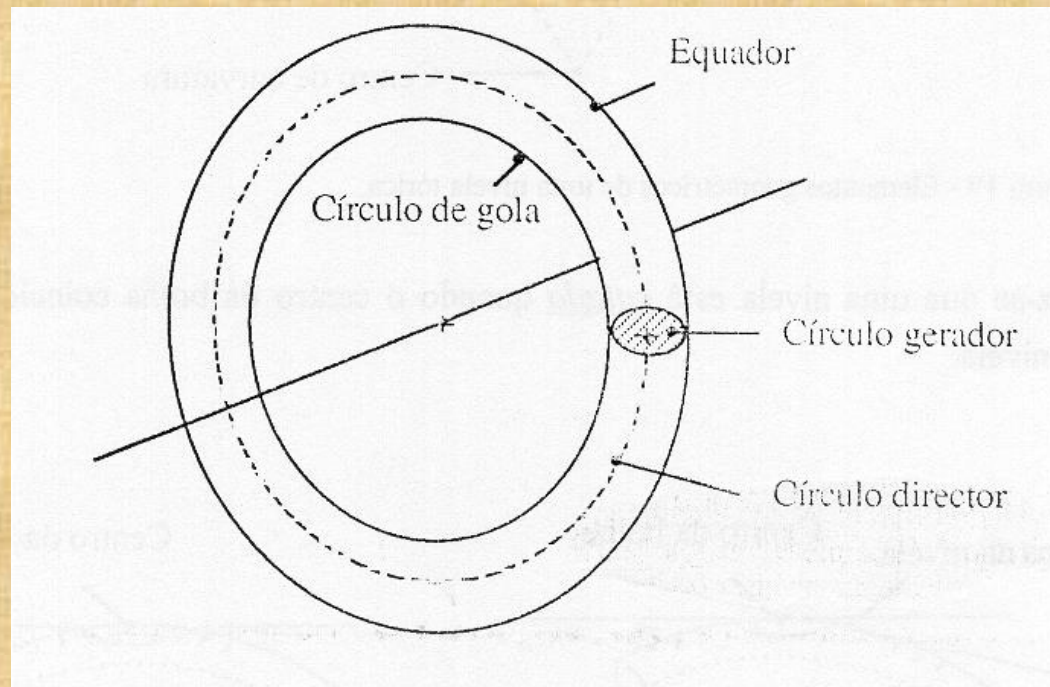
# Classificação das superfícies

- Superfícies de revolução
  - Não regradas
    - Parabolóide de revolução
      - Gerada pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo
    - Toro
      - Gerada pela rotação de uma circunferência em torno de uma recta qualquer do seu plano



# Classificação das superfícies

- Superfícies de revolução
  - Toro de revolução



# Classificação das superfícies

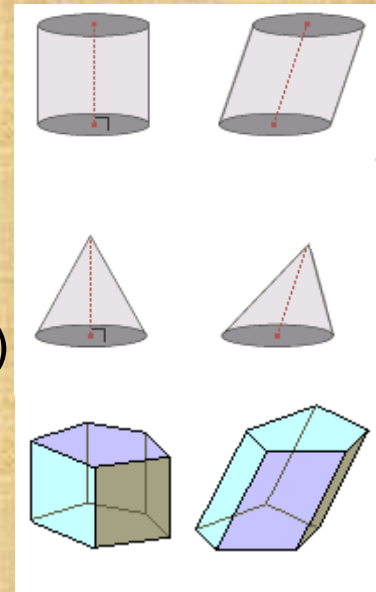
---

- Sólidos **geométricos**
  - Corpos limitados por uma **superfície fechada finita**
    - Esfera, elipsóide, toro
  - Corpos contidos dentro de uma **superfície fechada e limitada por** uma ou mais **superfícies planas** que intersectem aquelas
    - A primeira superfície dá origem às **faces** laterais do sólido (quando forem planas) ou à **superfície** lateral do sólido (quando não for plana)
    - As superfícies planas originam a **base** ou **bases**
    - Exemplos:
      - Cones, cilindros, pirâmides, prismas, troncos de elipsóide, troncos de hiperbolóide,...

# Classificação das superfícies

## ■ Sólidos geométricos

- **Corpos contidos dentro de uma superfície fechada e limitada por uma ou mais superfícies planas** que intersectem aquelas
  - **Altura do sólido** – Distância entre os planos das bases ou distância do vértice ao plano da base
  - **Sólido recto** – a base ou as bases são perpendiculares às geratrizes (se elas forem paralelas) ou à linha de união do vértice com o centro da base (superfícies cónicas ou piramidais)
  - **Sólido oblíquo** – sólido que não é recto
  - **Sólido regular** – sólido recto com faces laterais iguais
  - **Sólido irregular** – sólido recto com faces laterais diferentes



# Classificação das superfícies

## ■ Sólidos geométricos

- Corpos limitados unicamente por superfícies planas (**poliedros**)
  - Faces do poliedro ( $n^{\circ}$  de faces= $F$ )
    - Polígonos planos que limitam o poliedro
  - Arestas do poliedro ( $n^{\circ}$  de arestas= $A$ )
    - Linha de intersecção das faces do poliedro
  - Vértices do poliedro ( $n^{\circ}$  de vértices= $V$ )
    - Pontos de intersecção de três ou mais arestas

$$F + V = A + 2$$



# Classificação das superfícies

---

## ■ Sólidos geométricos

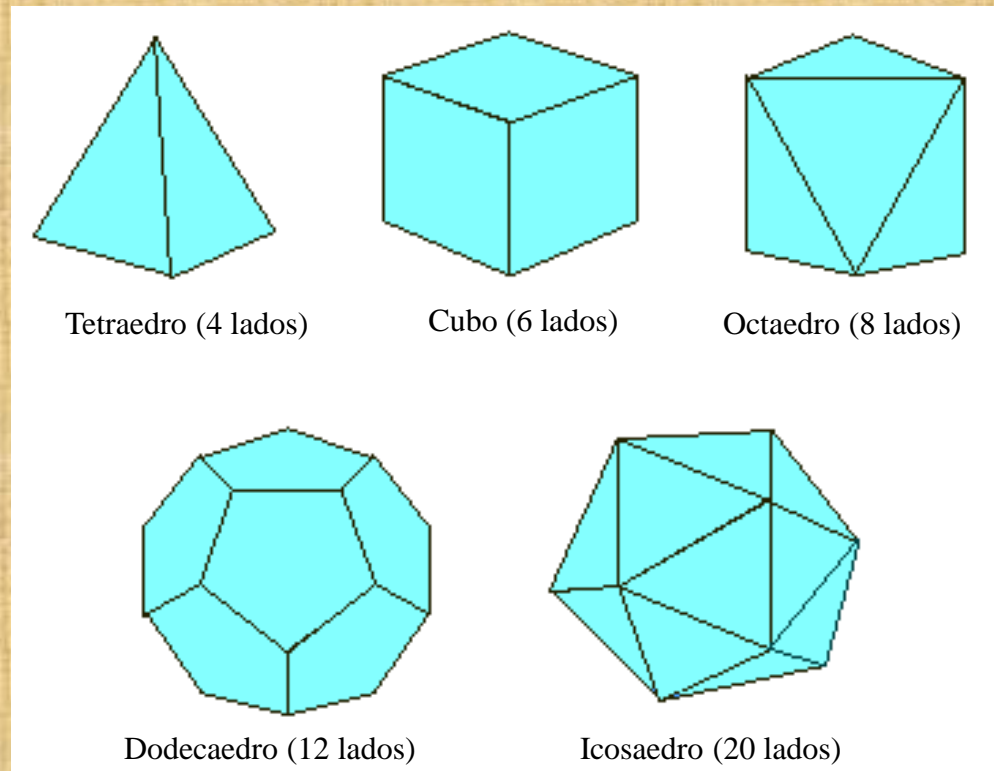
- **Corpos limitados unicamente por superfícies planas (poliedros)**
  - Cada vértice de um poliedro é vértice de um ângulo poliédrico
    - **Ângulo poliédrico**: porção de espaço limitada por rectas traçadas de um mesmo ponto (vértice) para todos os pontos de uma linha poligonal fechada.
  - **Poliedro regular**: poliedro com faces iguais e ângulos poliédricos iguais

# Classificação das superfícies

## ■ Sólidos geométricos

### ■ Poliedros regulares

- Tetraedro
  - 4 triângulos equiláteros
- Cubo
  - 6 quadrados
- Octaedro
  - 8 triângulos equiláteros
- Dodecaedro
  - 12 pentágonos
- Icosaedro
  - 20 triângulos equiláteros



# Classificação das superfícies

---

- Sólidos geométricos
  - Sólidos geométricos compostos
    - Corpos constituídos por sólidos geométricos elementares

# 4.2 Representação diédrica de superfícies

---

Geometria Descritiva  
2006/2007

# Representação diédrica

## Poliedros

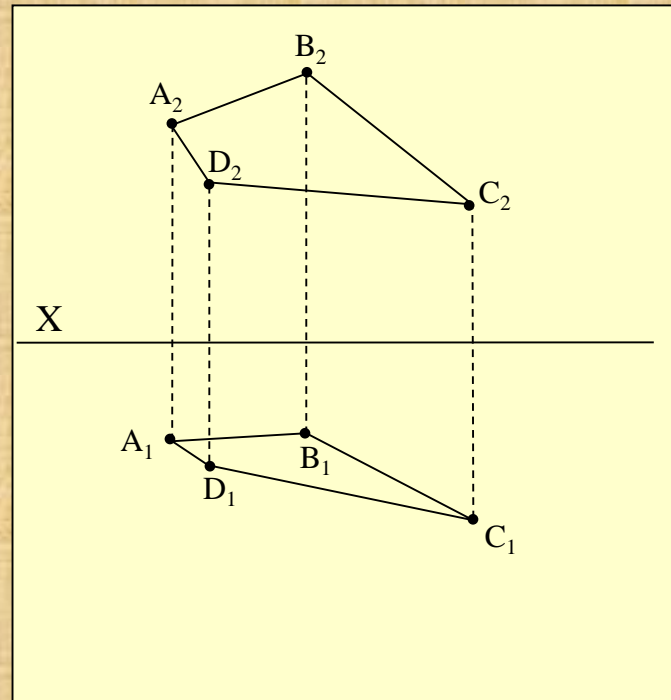
---

- A representação diédrica de poliedros resulta da projecção das suas arestas e vértices sobre os planos de projecção.

# Representação diédrica

## Poliedros

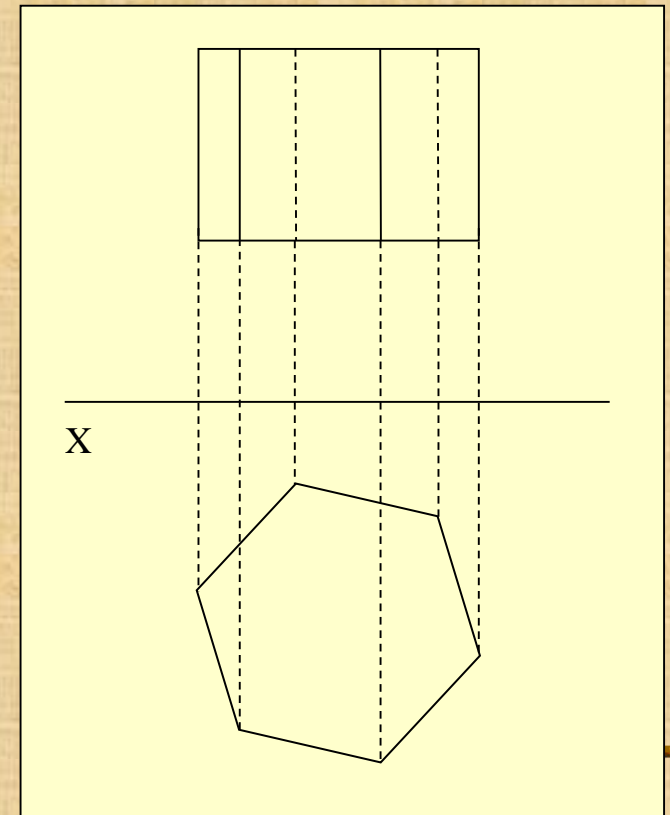
- Representação do polígono ABCD



# Representação diédrica

## Poliedros

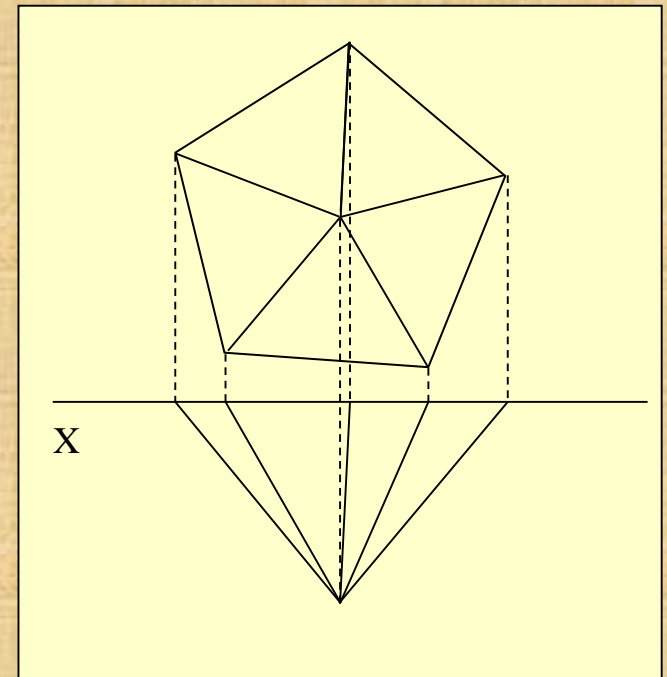
- Prisma hexagonal
  - Representação de um prisma hexagonal regular e recto com **bases de nível**



# Representação diédrica

## Poliedros

- Pirâmide pentagonal
- Pirâmide pentagonal recta com a base assente no plano frontal de projecção

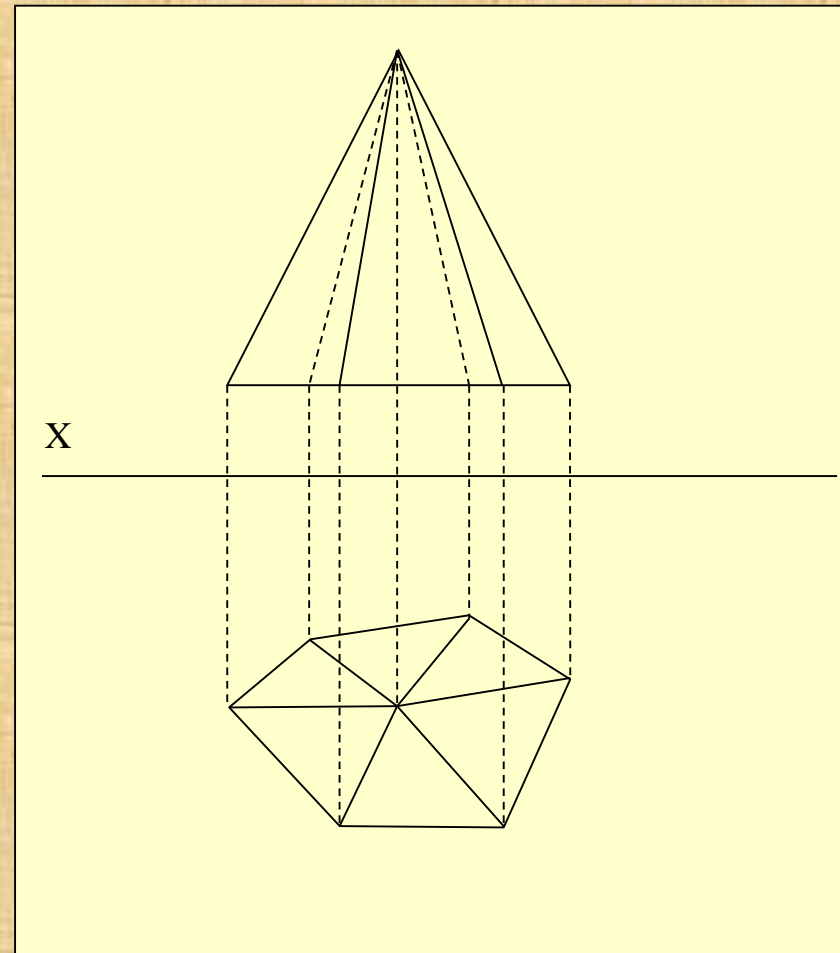




# Representação diédrica

## Poliedros

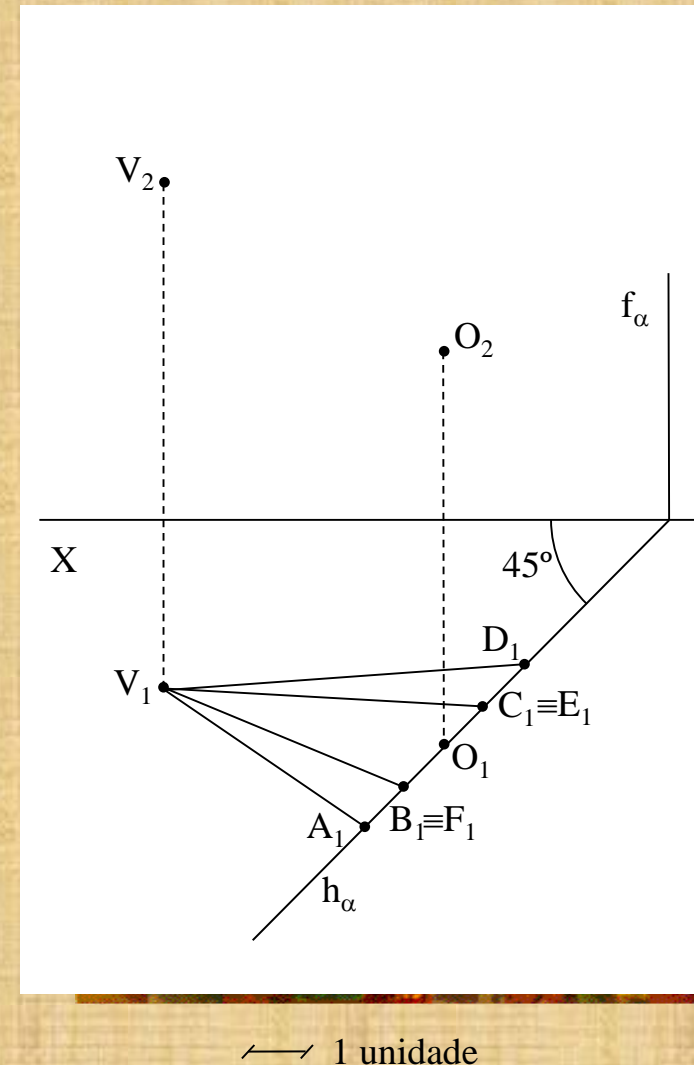
- Pirâmide hexagonal com **base de nível**



# Representação diédrica

## Poliedros

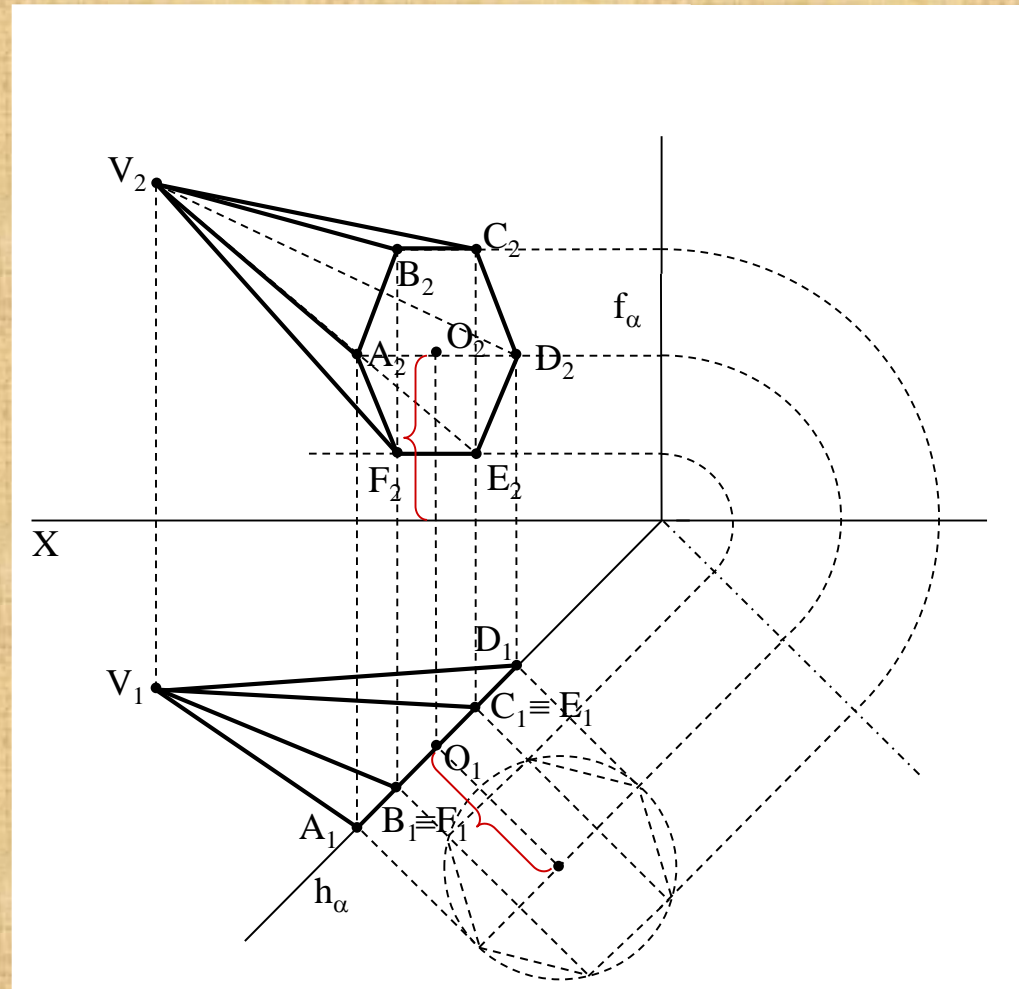
- Representar uma **pirâmide oblíqua**
  - de **vértice**  $V(5;3;6)$
  - **base** hexagonal regular (com dois lados horizontais com comprimentos de 2 unidades)
  - **base** centrada em  $O(0;4;3)$  e assente num plano projectante horizontal  $\alpha$  que faz um ângulo de  $45^\circ$  com  $\varphi_0$  (abertura para a esquerda).



# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Poliedros

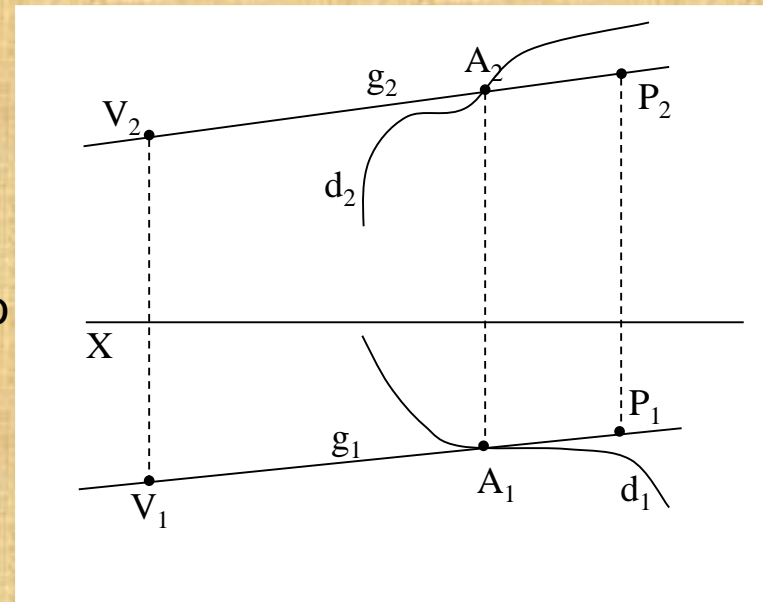
- Fez-se o **rebatimento** da **base** da pirâmide sobre o plano horizontal de projecção



# Representação diédrica

## Superfície cónica

- Uma superfície **cónica** fica definida pelo seu **vértice** e **directriz**
  - Determinar a **projectão frontal** de um ponto P da superfície cónica conhecendo a sua **projectão horizontal**
    - Qualquer ponto da superfície está sobre uma **geratriz** da superfície
    - O **vértice** da superfície e qualquer ponto da **directriz** definem uma **geratriz**
    - Unindo  $P_1$  com  $V_1$  obtém-se a **projectão horizontal** de uma geratriz (que passa pelo ponto A da directriz)
    - A sua **projectão frontal** passa por  $V_2$  e  $A_2$
    - A posição de  $P_2$  está sobre a projectão frontal da geratriz considerada.



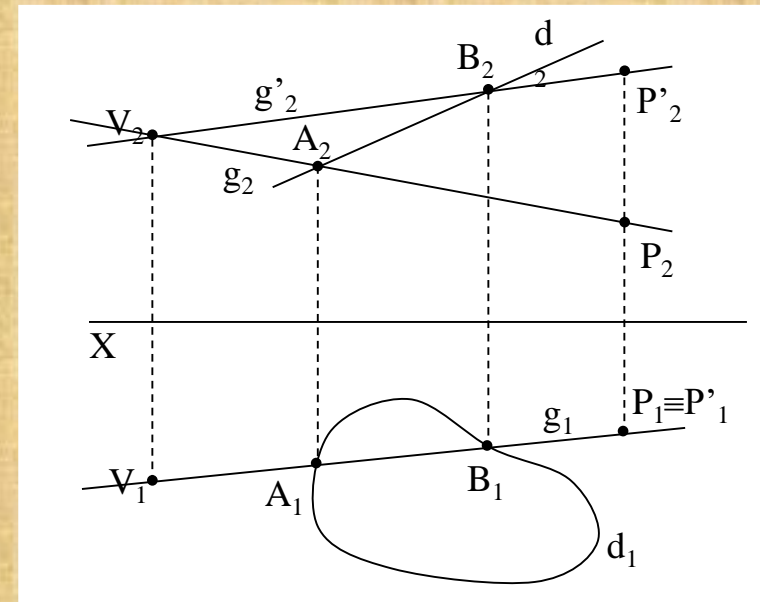
# Representação diédrica

## Superfície cónica

- Determinar a **projecção frontal** de um ponto  $P$  da superfície cónica conhecendo a sua **projecção horizontal**

- A superfície cónica é definida pelo **vértice** e pela **directriz**, que está situada num **plano de topo**

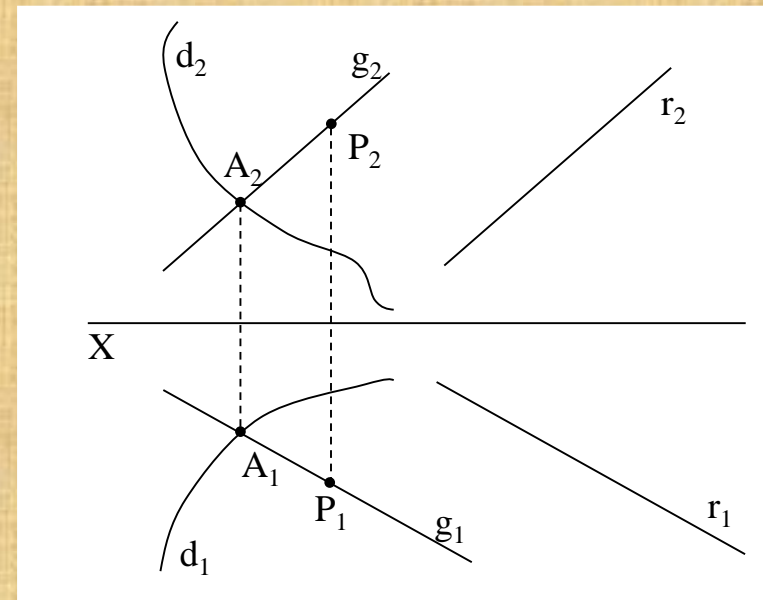
- Existem neste caso duas geratrizes possíveis e consequentemente dois pontos possíveis  $P$  e  $P'$



# Representação diédrica

## Superfície cilíndrica

- Uma superfície **cilíndrica** fica definida:
  - pela **directriz** e por uma das **geratrizes**
  - pela **directriz** e pela **direcção** das geratrizes
- Determinar a **projectão frontal** de um ponto P da superfície cilíndrica conhecendo a sua **projectão horizontal**
  - A recta r indica a **direcção** das **geratrizes**.
  - Dada a projectão horizontal do ponto P ( $P_1$ ) considera-se uma **geratriz** que passe nesse ponto
  - A sua projectão frontal ( $P_2$ ) ficará sobre a **projectão frontal** da mesma geratriz



# Representação diédrica

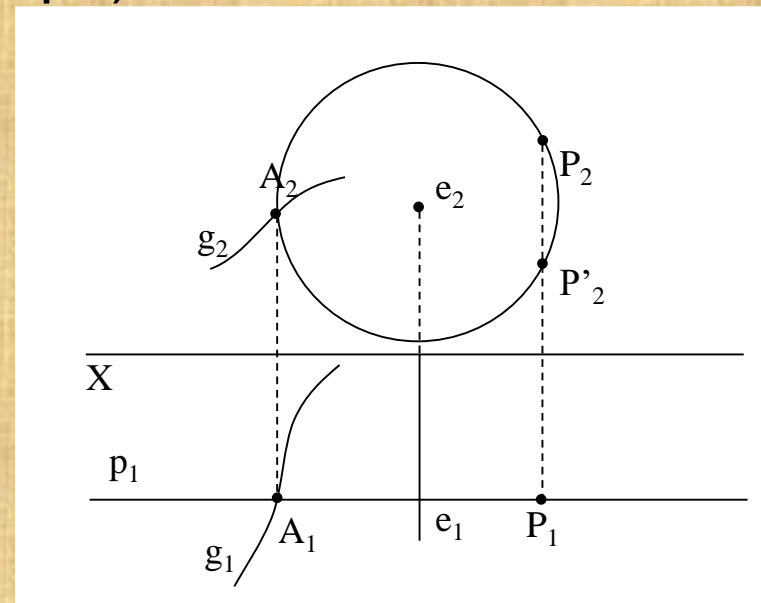
## Superfície de revolução

- Uma **superfície de revolução** fica definida pelo **eixo** e pela **geratriz**.
  - Se o eixo é **projectante horizontal** (ou **frontal**)
    - O paralelo que contém cada ponto projecta-se em **verdadeira grandeza no plano horizontal** (**plano frontal**)
  - Se o eixo é **paralelo** a um **plano de projecção**
    - O paralelo que contém cada ponto não se projecta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos
    - Para que o paralelo se projecte em verdadeira grandeza faz-se o seu **rebatimento** até que fique paralelo a um plano de projecção
  - Se o eixo é **oblíquo**
    - É necessário passar ao primeiro ou ao segundo caso através de **rotações** ou **mudança de planos**

# Representação diédrica

## Superfície de revolução

- Dada a **projectão horizontal** de um ponto da superfície de revolução, determinar a sua **projectão frontal**
  - O eixo é **projectante** (recta de topo)
    - Considera-se um ponto da geratriz (ponto A) que pertença ao mesmo **paralelo** (p) da superfície de revolução
    - A projectão frontal de P estará sobre o mesmo **paralelo** que a projectão frontal de A
    - Há duas possibilidades para a **projectão frontal** de P, P<sub>2</sub> e P'<sub>2</sub>



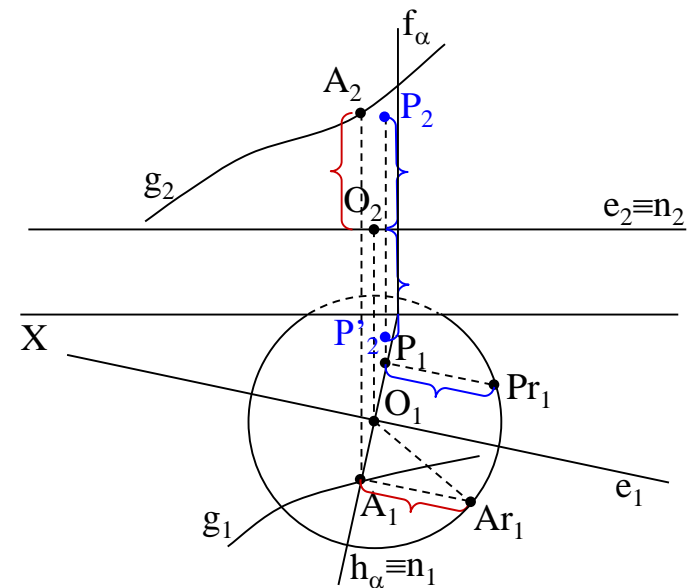


# Representação diédrica

## Superfície de revolução

■ Dada a **projecção horizontal** de um ponto da superfície de revolução determinar a sua **projecção frontal**

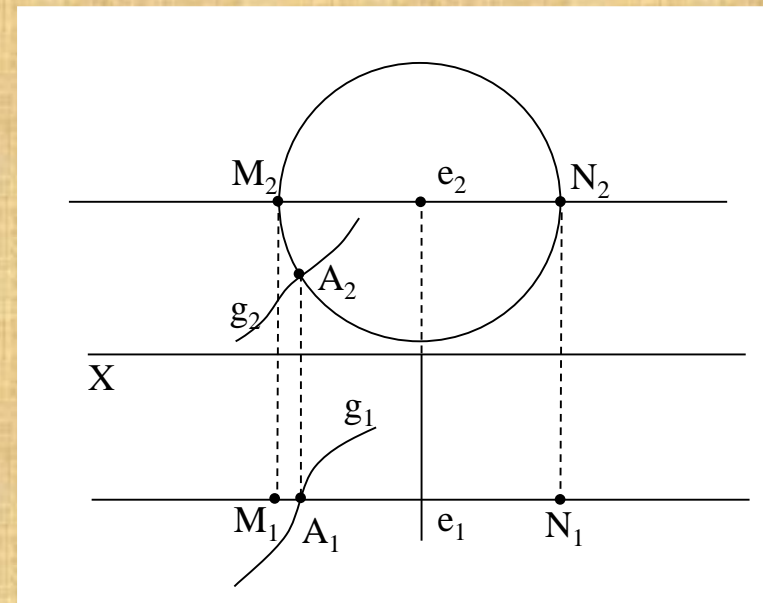
- O eixo é **paralelo** ao plano **horizontal** de projecção (recta de nível)
- Considera-se um **plano vertical**  $\alpha$  **perpendicular** ao eixo da superfície de revolução e que **contém** P
- A intersecção do plano  $\alpha$  com a geratriz determina o ponto A que pertence ao **paralelo** que contém o ponto P da superfície de revolução e o centro O desse paralelo
- **Rebate-se** o plano  $\alpha$  em torno da charneira  $n$  (este plano fica agora horizontal)
- O paralelo que contém A e P aparece agora em **verdadeira grandeza** no plano **horizontal** de projecção
- **Desfazendo o rebatimento** as projecções frontais possíveis do ponto P são  $P_2$  e  $P'_2$



# Representação diédrica

## Superfície de revolução

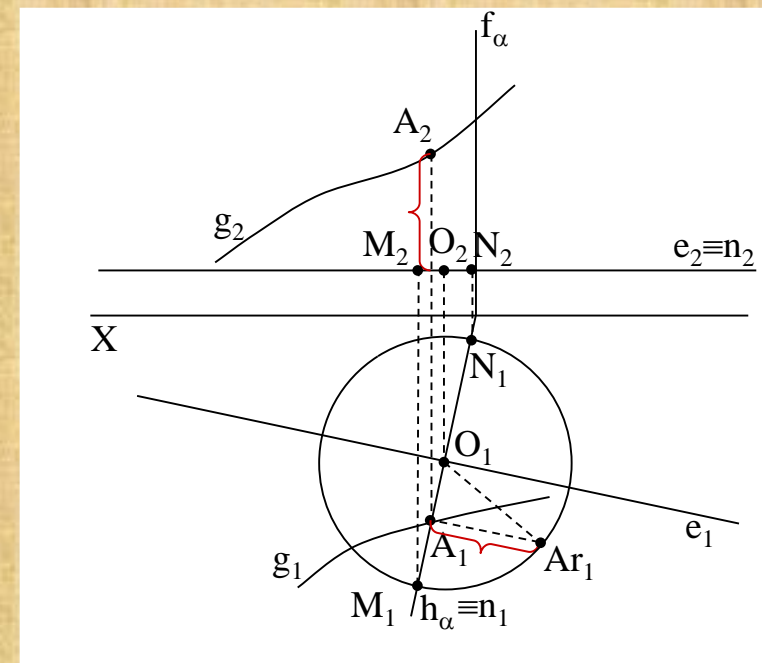
- Determinar a **meridiana principal** de uma superfície de revolução a partir da **geratriz** e do **eixo** (recta de topo)
  - Procura-se sobre cada **paralelo** da superfície **dois pontos** da meridiana principal
    - Escolhe-se um **ponto A** sobre a **geratriz**
    - Determina-se o **paralelo** que contém A
    - Sobre o paralelo obtido identificam-se os pontos M e N situados sobre o **diâmetro de nível**, que pertencem portanto à meridiana principal



# Representação diédrica

## Superfície de revolução

- Determinar a **meridiana principal** de uma superfície de revolução a partir da **geratriz** e do **eixo** (**paralelo** ao plano **horizontal** de projecção)
- Procura-se sobre cada **paralelo** da superfície **dois pontos** da meridiana principal
  - Escolhe-se um **ponto**  $A$  sobre a **geratriz**
  - Determina-se o **paralelo** que contém  $A$
  - **Rebate-se** o plano vertical  $\alpha$  que contém o paralelo gerado por  $A$  em torno da recta de nível  $n$
  - Sobre o paralelo obtido, agora horizontal, identificam-se os **pontos**  $M$  e  $N$  situados sobre o **diâmetro de nível**, que pertencem portanto à meridiana principal



# Representação diédrica

## Esfera

---

- Uma **esfera** fica definida pelo **centro** e pelo **raio**
  - Para fazer a representação diédrica de uma esfera basta ter:
    - As projecções diédricas do **centro** e de um **raio**
    - As projecções diédricas do **centro** e de um **ponto** qualquer **da superfície**
  - Mas esta forma de representar uma esfera **não é sugestiva**

# Representação diédrica

## Esfera

---

- Uma **esfera** também pode ser representada em Geometria de Monge através da representação dos seus **círculos máximos paralelos aos planos de projecção**
  - As projecções horizontal e frontal destes círculos contêm todas as projecções dos pontos da esfera
    - **Contorno aparente da esfera**

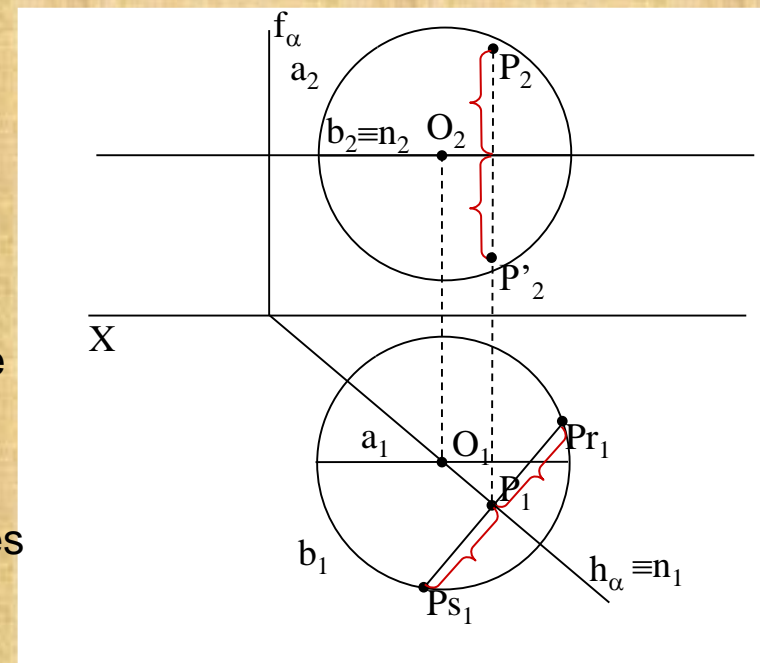
# Representação diédrica

## Esfera

- Determinar a **projecção frontal** do ponto P da esfera definida pelo **círculo máximo frontal** a e pelo **círculo de nível** b conhecendo-se a sua **projecção horizontal**

- **Método 1:** Utilizando o **círculo máximo** que contém o ponto

- O **círculo máximo** que contém o ponto está no plano vertical  $\alpha$
- Faz-se o **rebatimento** deste plano até que fique horizontal (o círculo máximo que contém P fica coincidente com  $b_1$ )
- **Desfazendo** o **rebatimento** temos duas soluções possíveis:  $P_2$  e  $P'_2$



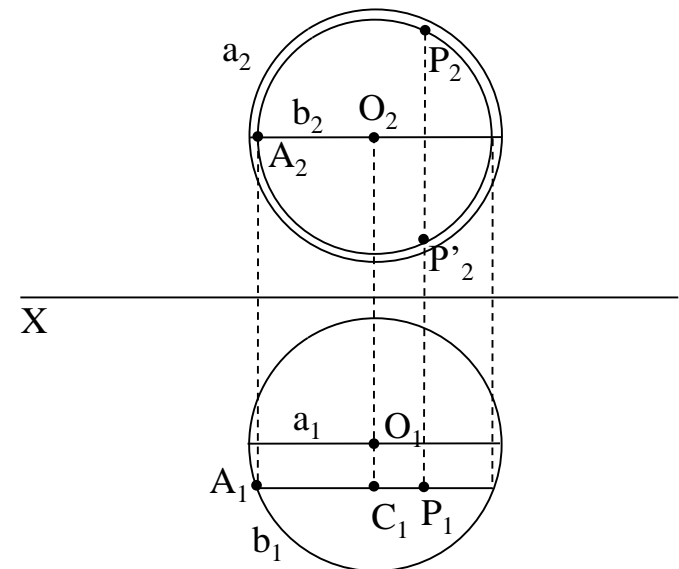
# Representação diédrica

## Esfera

- Determinar a **projecção frontal** do ponto P da esfera definida pelo **círculo máximo frontal** a e pelo **círculo de nível** b conhecendo-se a sua **projecção horizontal**

- **Método 2:** Utilizando o **paralelo** gerado pelo ponto

- Considera-se o **plano frontal** que contém o **paralelo** de centro C e raio AC (paralelo frontal que contém o ponto P).
- Como está num plano frontal o paralelo projecta-se em **verdadeira grandeza** no plano **frontal** de projecção
- Como o paralelo contém o ponto P temos duas soluções possíveis:  $P_2$  e  $P'_2$



# 4.3 Planos tangentes e contornos aparentes

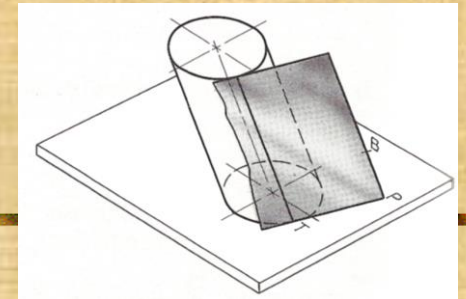
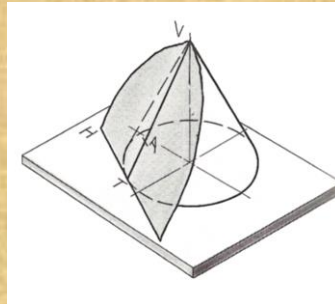
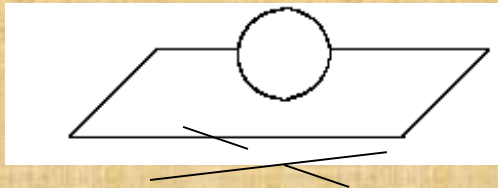
---

Geometria Descritiva  
2006/2007



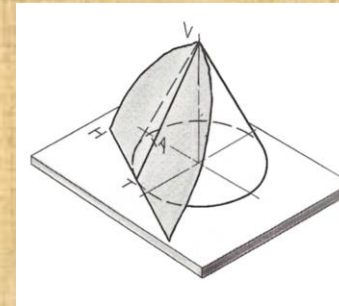
# Planos tangentes

- Por cada ponto de uma superfície passam infinitas curvas
- Cada curva tem a sua tangente nesse ponto
- Quando o lugar geométrico das tangentes for um **plano** este plano chama-se **plano tangente** à superfície nesse ponto e o ponto chama-se **ponto ordinário**
  - Quando tal não acontece o ponto é um **ponto singular**



# Planos tangentes

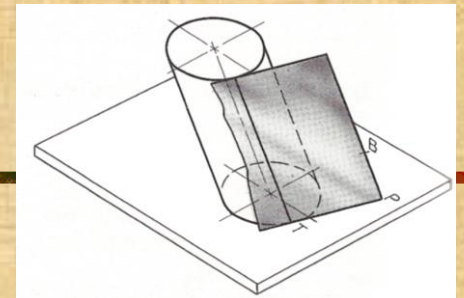
- Para definir o **plano tangente** a uma superfície num ponto ordinário basta identificar as **tangentes** (não coincidentes) a **duas** das **curvas** que por ele passam
  - Por exemplo:
    - A geratriz rectilínea (se a superfície for regrada)
    - A directriz
    - A meridiana
    - O paralelo



# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Plano tangente

- Nas superfícies regradas planificáveis
  - o plano tangente é o **mesmo** em **qualquer ponto** da **geratriz** rectilínea
  - o **plano tangente** pode ser determinado utilizando **outro ponto** da **mesma geratriz** (mais conveniente)
  - o ponto mais conveniente é o ponto de **intersecção** da **geratriz** que contém o ponto dado com a **directriz**



# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Plano tangente

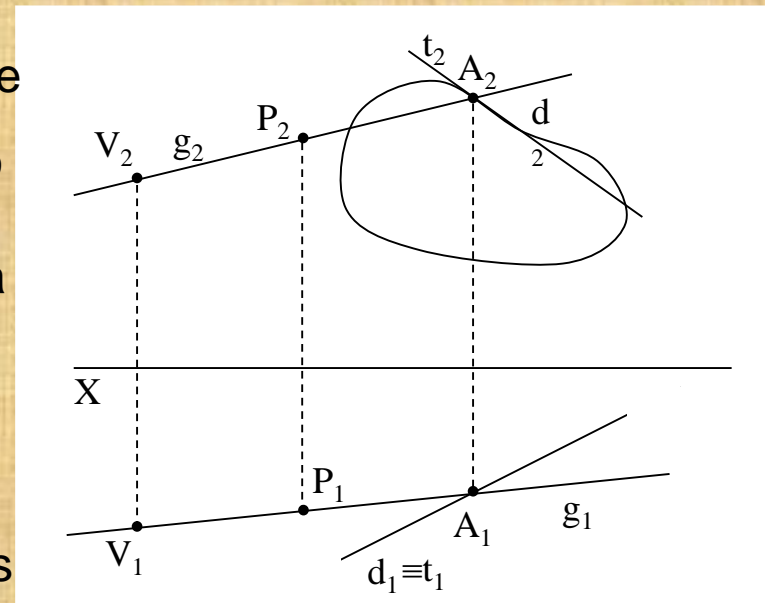
- Determinar o **plano tangente** ao ponto P da superfície cónica definida pelo seu **vértice** e **directriz** (situada num plano vertical)

- Como a superfície é **regrada** a **geratriz** pode ser usada para definir o plano tangente

- Como a superfície é regrada **planificável** o plano tangente em P **coincide** com o plano tangente em A (ponto da directriz situado na mesma geratriz que P)

- Considera-se agora a **tangente** à directriz no ponto A (recta t)

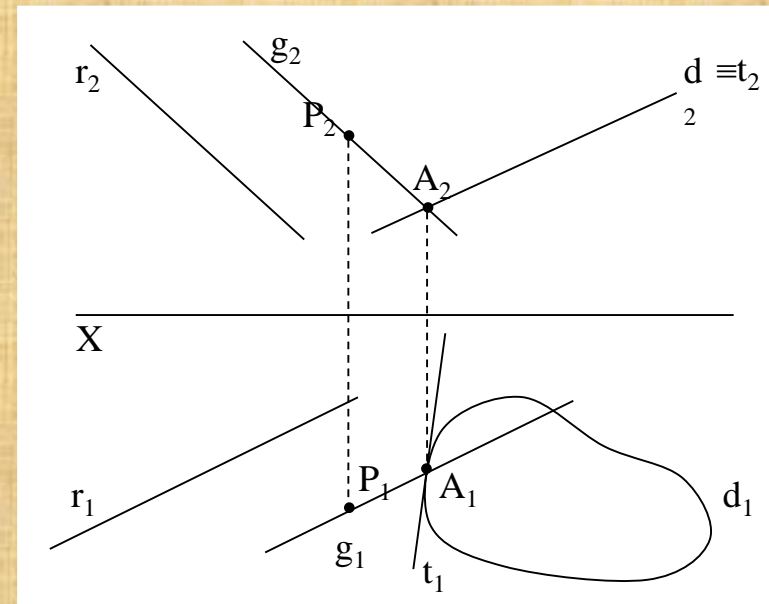
- O **plano tangente** fica definido pelas rectas g e t ou pelo ponto P e recta t.



# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Plano tangente

- Determinar o **plano tangente** ao ponto P da superfície cilíndrica definida pela **directriz** (d) (situada num plano de topo) e pela **direcção** das **geratrizes** (recta r)
  - Considera-se a **geratriz** g da superfície que passa no ponto P
  - A **intersecção** da **geratriz** considerada com a **directriz** define o **ponto A** (ponto da directriz situado na mesma geratriz que P)
  - Considera-se a **tangente** à **directriz** no ponto A (recta t)
  - O **plano tangente** fica definido pelas rectas g e t ou pelo ponto P e pela recta t.

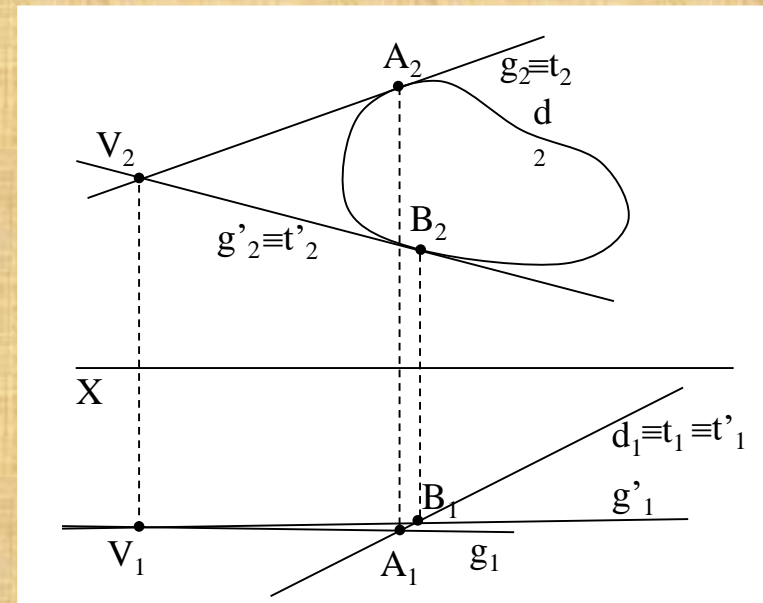


# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Plano tangente projectante

- Determinar os **planos tangentes** à superfície cónica que são **projectantes frontais** (de topo)

- Os **planos tangentes** são **tangentes** à superfície ao longo de uma **geratriz** da superfície
- Essa geratriz pertence ao plano tangente
- Consideram-se as **geratrizes**  $g$  e  $g'$  e as **tangentes** à **directriz** nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente  $t$  e  $t'$
- Os **planos tangentes** de topo são definidos pelas rectas  $g$  e  $t$  e as rectas  $g'$  e  $t'$ .

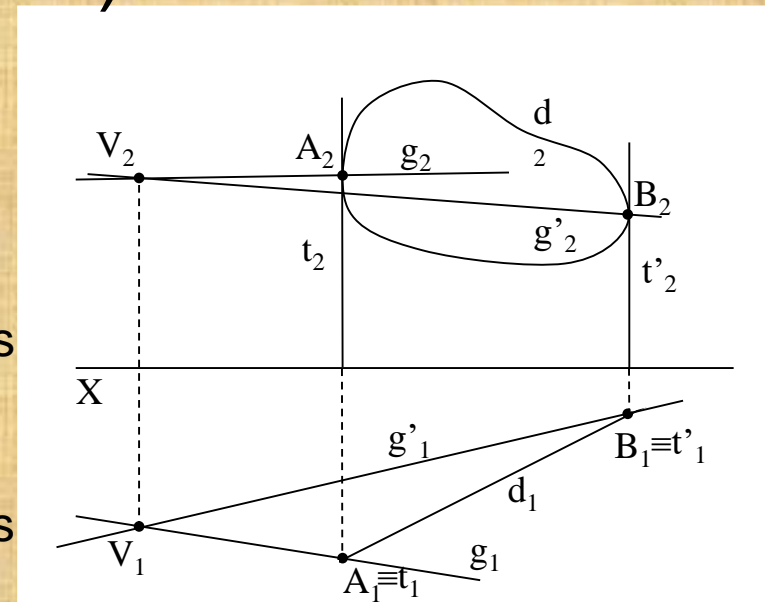


# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Plano tangente projectante

- Determinar os **planos tangentes** à superfície cónica que são **projectantes horizontais** (planos verticais)

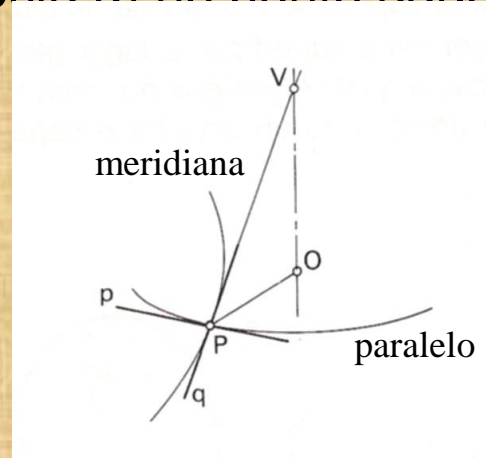
- Os **planos tangentes** são **tangentes** à superfície ao longo de uma **geratriz** da superfície
- Essa geratriz pertence ao plano tangente
- Consideram-se as **tangentes** à **directriz** nos pontos A e B, respectivamente t e t' (rectas verticais) e as **geratrizes** g e g'
- Os **planos tangentes** verticais são definidos pelas rectas g e t e as rectas g' e t'.



# Superfícies de revolução

## Plano tangente

- Determinar o **plano tangente** a uma superfície de revolução num **ponto dado** da superfície
  - **1º Processo**
    - Escolhe-se o **paralelo** e a **meridiana** da superfície que passam por esse ponto
    - Determinam-se as **tangentes** ao paralelo (recta p) e à meridiana (recta q) no ponto dado P





# Superfícies de revolução

## Plano tangente

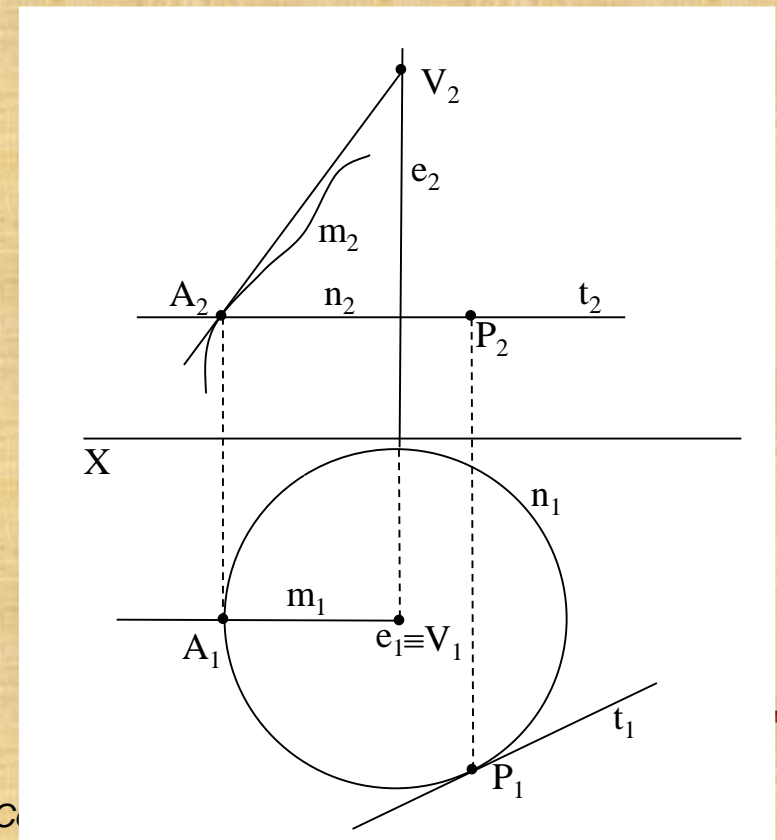
- Determinar o **plano tangente** a uma superfície de revolução num **ponto dado** da superfície
    - **2º Processo**
      - Substitui-se a superfície de revolução por
        - um **cone** circunscrito ou inscrito ao longo do paralelo que contém o ponto
        - uma **superfície cilíndrica** circunscrita ou inscrita ao longo da meridiana
        - uma **esfera** inscrita ou circunscrita à superfície ao longo daquele paralelo
- de forma que o **plano tangente** à superfície no ponto dado **coincida** com o **plano tangente** à superfície de substituição escolhida

# Superfícies de revolução

## Plano tangente

- Determinar o **plano tangente** a uma superfície de revolução, definida por um ramo da **meridiana principal** ( $m$ ) e pelo **eixo** ( $e$ ), num **ponto dado** ( $P$ ) da superfície

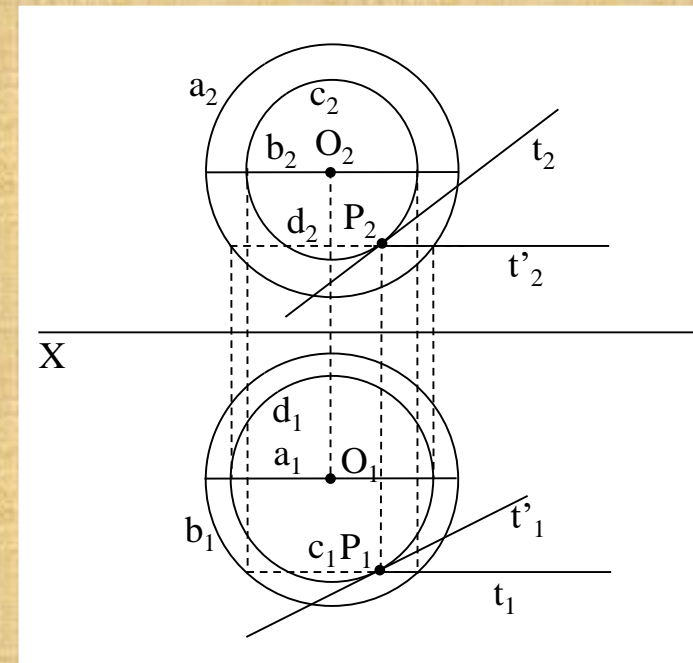
- É conhecida a **projecção frontal** de  $P$  ( $P_2$ )
- Determina-se a **projecção horizontal** de  $P$  ( $P_1$ )
- O **plano tangente** em  $A$  à superfície de revolução também é **tangente** ao **cone** circunscrito ao longo do paralelo  $n$  e com vértice  $V$
- Quando  $A$  se desloca sobre o paralelo a tangente à meridiana no ponto  $A$  gera o cone com vértice em  $V$ , assim,  $A$  vai ocupar a posição de  $P$  durante o movimento
- O **plano tangente** ao **cone** (e à superfície de revolução) no ponto  $P$  é o plano definido pela **tangente**  $t$  ao **paralelo**  $n$  que contém  $P$  e pelo vértice  $V$  do cone



# Esfera

## Plano tangente

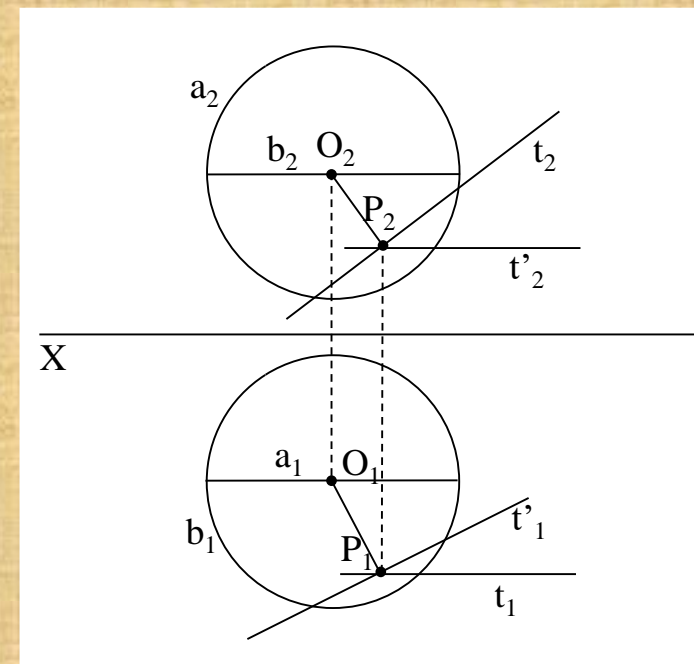
- O **plano tangente** a uma **esfera** num dos seus pontos pode ser definido pelas **tangentes** nesse ponto a qualquer das curvas traçadas sobre a superfície.
- As curvas escolhidas podem ser:
  - um **paralelo** e uma **meridiana**
  - dois **paralelos** (um frontal e um de nível)
    - É dado o ponto P da **esfera** (definida pelos círculos máximos horizontal b e frontal a)
    - Considera-se o **paralelo frontal** c e o **paralelo de nível** d que passam pelo ponto
    - A recta t é **tangente** ao **paralelo** c e a recta t' é **tangente** ao **paralelo** d
    - O **plano tangente** em P fica definido por t e t'



# Esfera

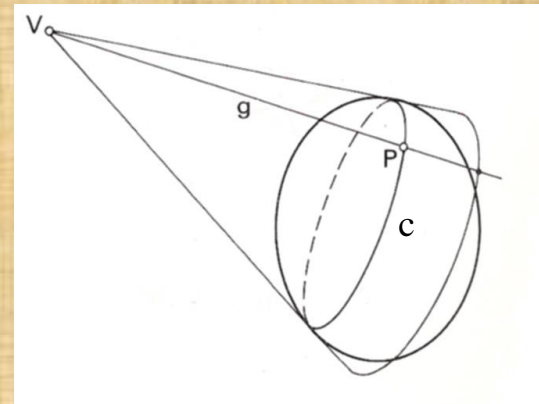
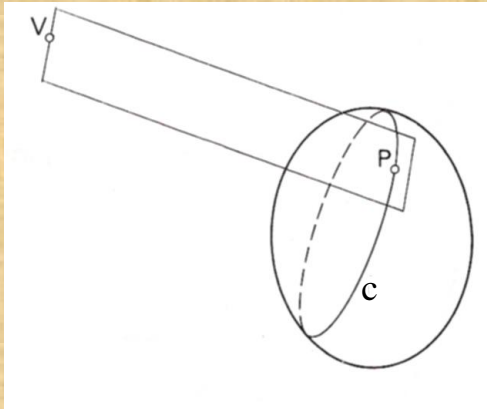
## Plano tangente

- Outro processo de obter o **plano tangente** a uma **esfera** num ponto dado  $P$ 
  - Qualquer **plano tangente** a uma esfera num dos seus pontos é **perpendicular** ao **raio** da esfera que passa nesse ponto
    - Traça-se o raio da esfera que passa em  $P$
    - Traça-se o plano perpendicular a  $OP$  definido pela recta frontal  $t$  e pela recta de nível  $t'$



# Contornos aparentes

- Considere-se um **ponto**  $V$  exterior a uma superfície e a família de **planos** que passam por  $V$  e são **tangentes** à superfície
- O lugar geométrico dos pontos  $P$  de **contacto** dos **planos** com a **superfície** é uma linha  $c$  da superfície que se designa por **contorno aparente visto de  $V$**
- O contorno aparente depende da posição do observador e separa as partes **visível** e **encoberta**.



# Contornos aparentes

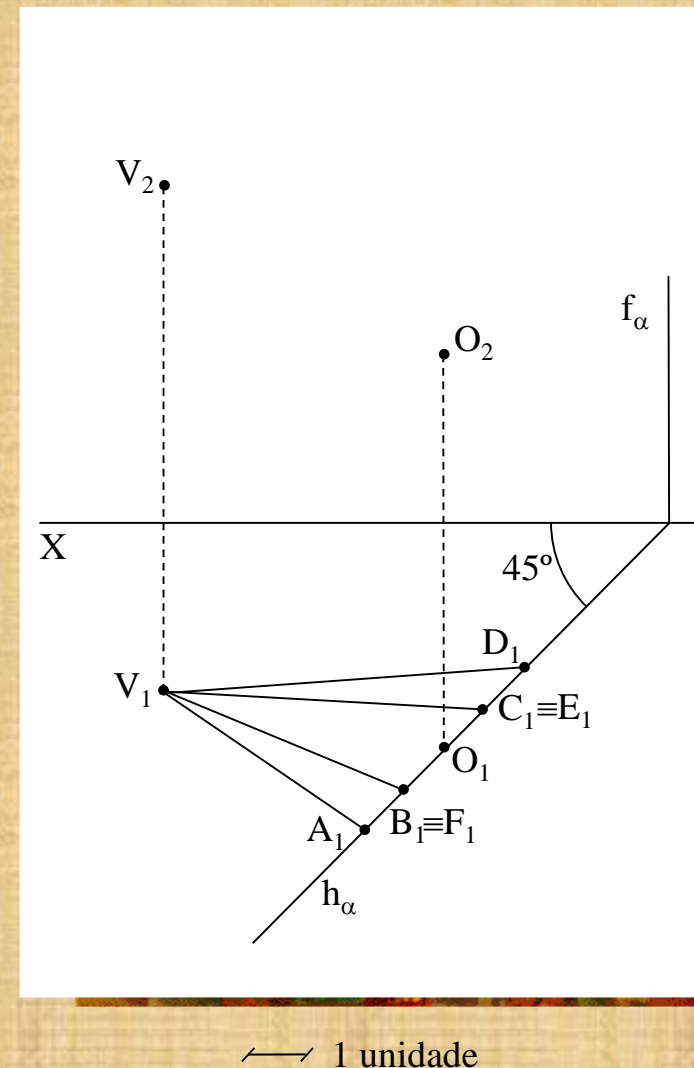
---

- Se o ponto  $V$  for um **ponto impróprio** e os raios visuais forem
  - **perpendiculares** ao plano **horizontal** de projecção diz-se que  $c$  é o **contorno aparente horizontal**
    - O contorno aparente horizontal separa a parte visível da parte invisível em projecção horizontal
  - **perpendiculares** ao plano **frontal** de projecção diz-se que  $c$  é o **contorno aparente frontal**
    - O contorno aparente frontal separa a parte visível da parte invisível em projecção frontal

# Poliedros

## Contornos aparentes

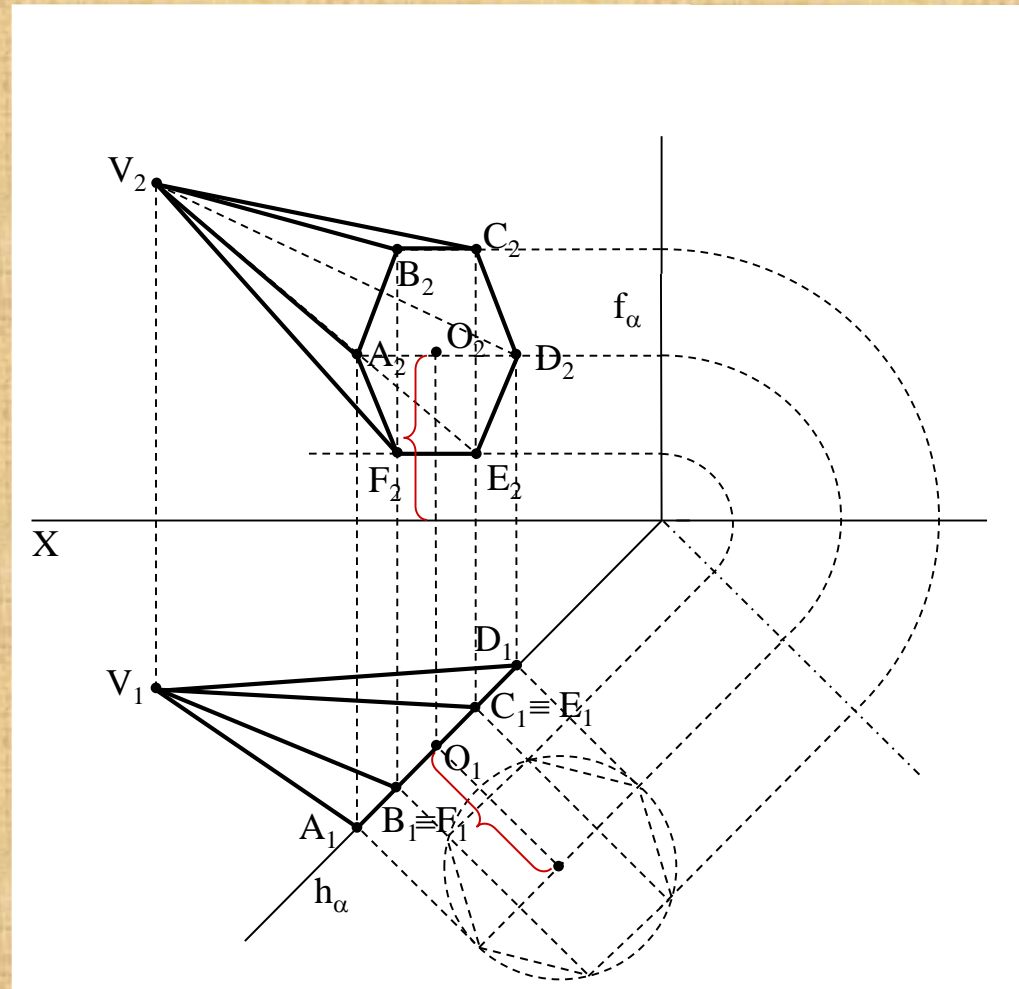
- Determinar os **contornos aparentes** de uma **pirâmide oblíqua**
  - de **vértice**  $V(5;3;6)$
  - **base** hexagonal regular (com dois lados horizontais com comprimentos de 2 unidades)
  - **base** centrada em  $O(0;4;3)$  e assente num plano projectante horizontal  $\alpha$  que faz um ângulo de  $45^\circ$  com  $\varphi_0$  (abertura para a esquerda).



# Poliedros

## Contornos aparentes

- Fez-se o **rebatimento** da **base** da pirâmide sobre o plano horizontal de projecção
- O **contorno aparente frontal** da pirâmide é a linha poligonal VCDEFV
- O **contorno aparente horizontal** da pirâmide é a linha poligonal VABCDV

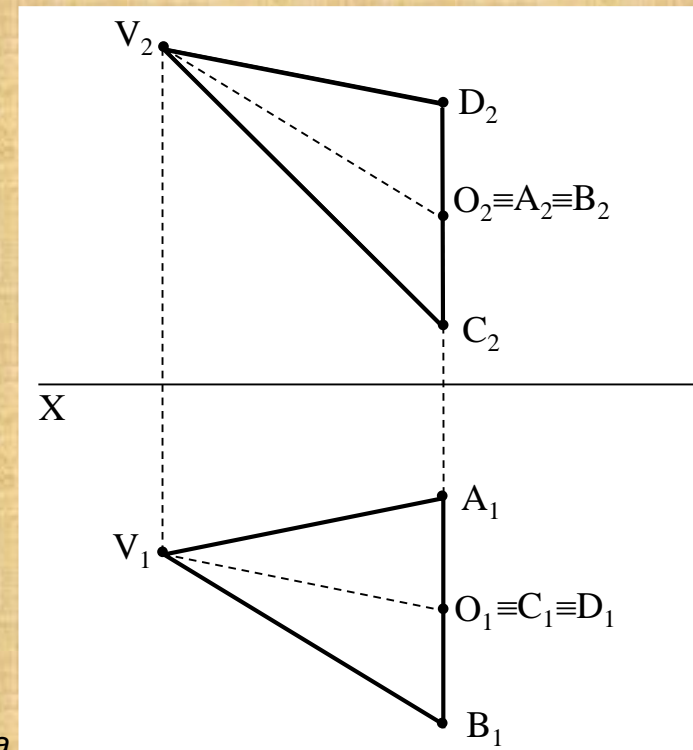




# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Contornos aparentes

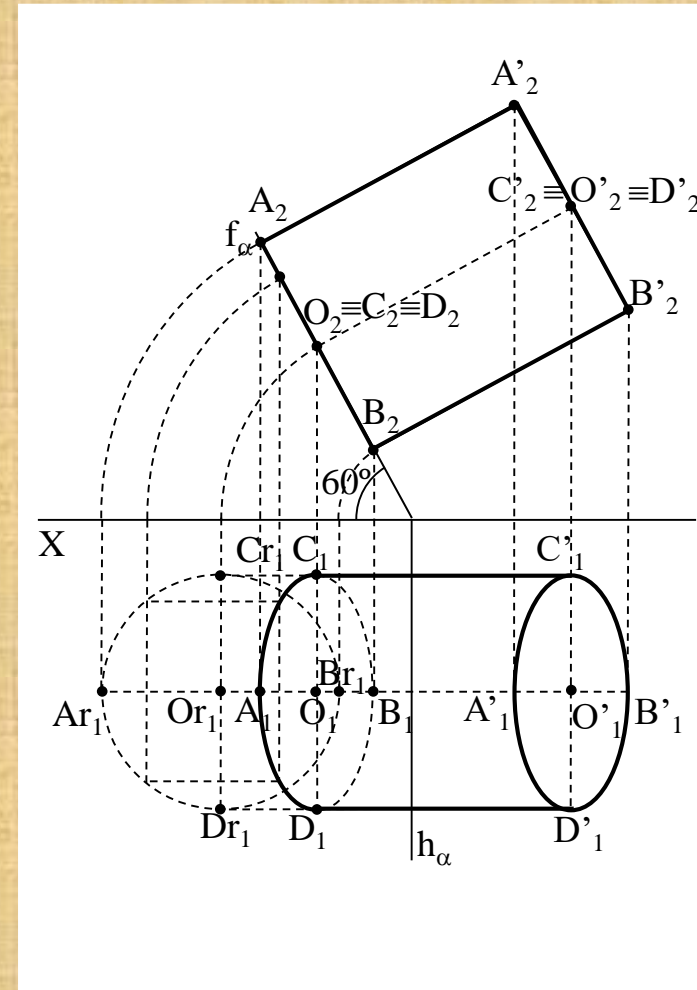
- Representar pelos seus **contornos aparentes** um **cone** definido pelo vértice  $V(5;3;6)$  e pela base circular com centro em  $O(0;4;3)$  e raio 2 situada num plano de perfil.
  - Os planos tangentes projectantes **horizontais** têm como **pontos de tangência** na **base** do cone os pontos A e B
  - O **contorno aparente horizontal** é a linha VADB<sub>2</sub>V (dois segmentos rectilíneos e uma semi-circunferência)
  - Os planos tangentes projectantes **frontais** têm como **pontos de tangência** na **base** do cone os pontos C e D
  - O **contorno aparente frontal** é a linha VCBDV



# Superfícies cónicas e cilíndricas

## Contornos aparentes

- Determinar os **contornos aparentes** de um **cilindro** de revolução com
  - 5 unidades de **altura**
  - as **bases** com raio igual a 2 unidades
  - a **base inferior** centrada em  $O(3;3)$  e assente num plano projectante frontal  $\alpha$  que faz um ângulo de  $60^\circ$  com  $v_0$  (abertura para a esquerda).
  - O **contorno aparente horizontal** é a linha constituída pelas geratrizes que passam respectivamente em C e C' e em D e D' e pelas semicircunferências CAD e C'B'D'
  - O **contorno aparente frontal** é a linha constituída pelas geratrizes que passam respectivamente em A e A' e em B e B' e pelas semicircunferências ADB e A'D'B'

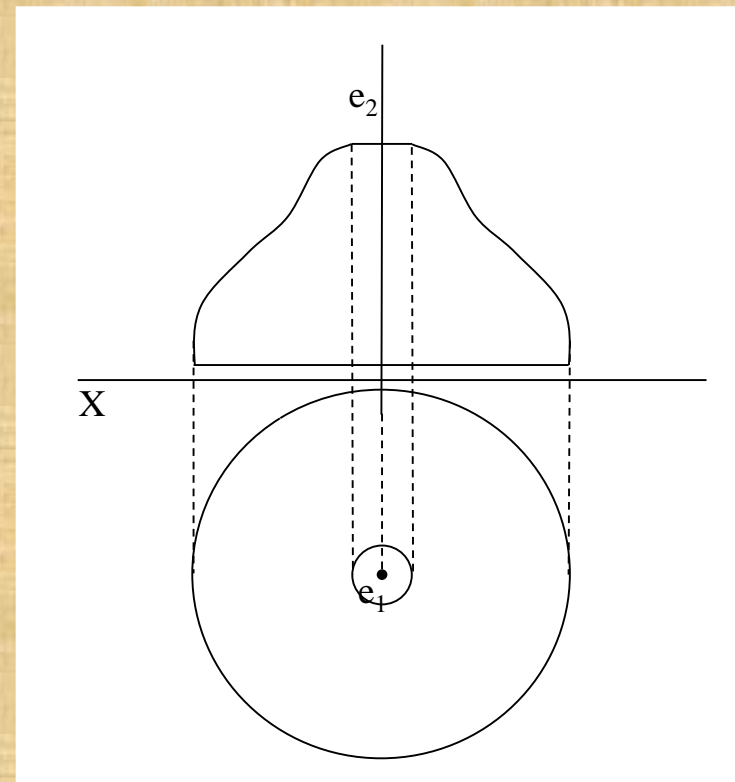
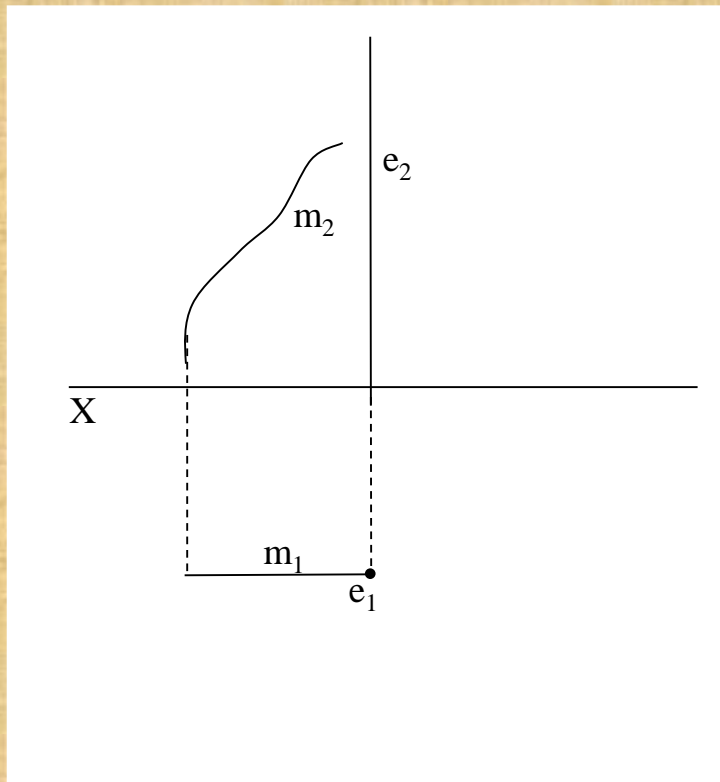


← 1 unidade

# Superfícies de revolução

## Contornos aparentes

- Os contornos aparentes de uma **superfície de revolução** podem ser determinados identificando pontos desse contorno



# Esfera

## Contornos aparentes

- Os **contornos aparentes** de uma **esfera** são os **círculos máximos** situados nos planos diametrais **paralelos** aos planos de projecção
  - O **contorno aparente frontal** é o lugar geométrico dos pontos de contacto dos planos tangentes projectantes frontais com a esfera
    - Os planos projectantes frontais são perpendiculares aos raios da esfera que passam pelos pontos de contacto dos planos com a esfera
    - Logo estes raios são todos segmentos frontais
    - Consequentemente os pontos de contacto são o círculo máximo frontal
  - Analogamente para o **contorno aparente horizontal**

# Esfera

## Contornos aparentes

- Os **contornos aparentes** de uma **esfera** são os **círculos máximos** situados nos planos diametrais **paralelos** aos planos de projecção

