7

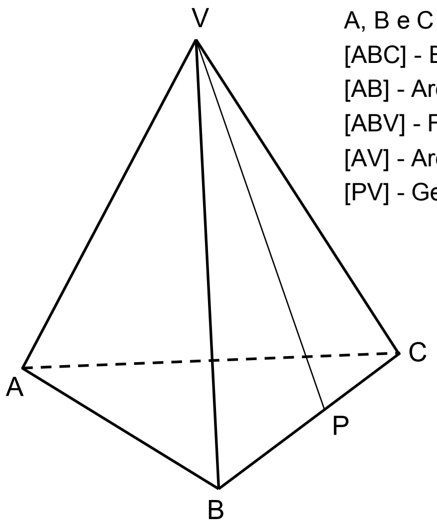
SÓLIDOS I

Neste capítulo mostra-se como se representam pirâmides, prismas, cones e cilindros em diferentes circunstâncias, recorrendo ou não a processos auxiliares. Mostra-se também como se traçam e determinam planos e retas tangentes a esses sólidos e à esfera.

Sumário:

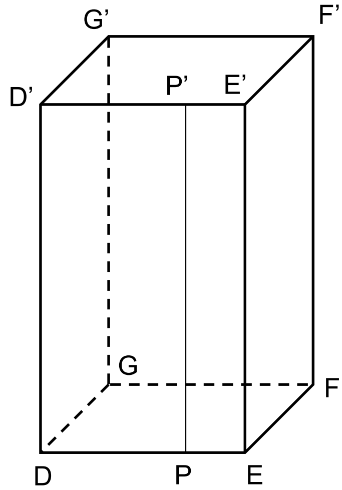
Nomenclatura de sólidos

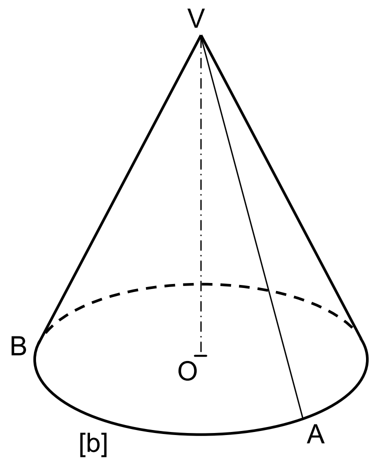
Para que os termos utilizados nas páginas que se seguem não constituam impasse à compreensão dos conteúdos nelas expostos, apresenta-se aqui a nomenclatura empregue no estudo dos sólidos.

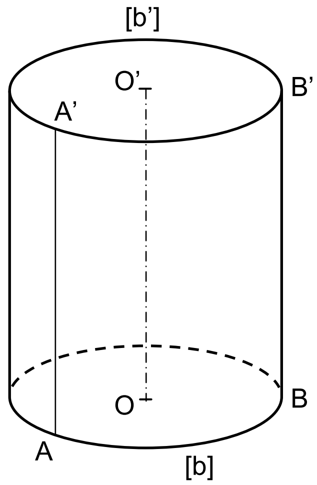


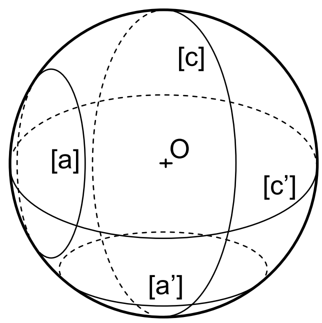
V - Vértice da pirâmide
A, B e C - Vértices da base
[ABC] - Base
[AB] - Aresta da base
[ABV] - Face (lateral)
[AV] - Aresta lateral
[PV] - Geratriz

[DEFG] e [D’E’F’G’] - Bases inferior e superior
D, E, F, G e D’, E’, F’, G’ - Vértices das bases inferior e superior
[DEE’D’] - Face (lateral)
[DE] e [D’E’] - Arestas das bases
[DD’] - Aresta lateral
[PP’] - Geratriz









V - Vértice
[b] - Base
O - Centro da base
[VO] - Eixo
[VA] - Geratriz
[VB] - Geratriz de contorno

[b] - Base inferior
[b’] - Base superior
O e O’ - Centros das bases
[OO’] - Eixo
[AA’] - Geratriz
[BB’] - Geratriz de contorno

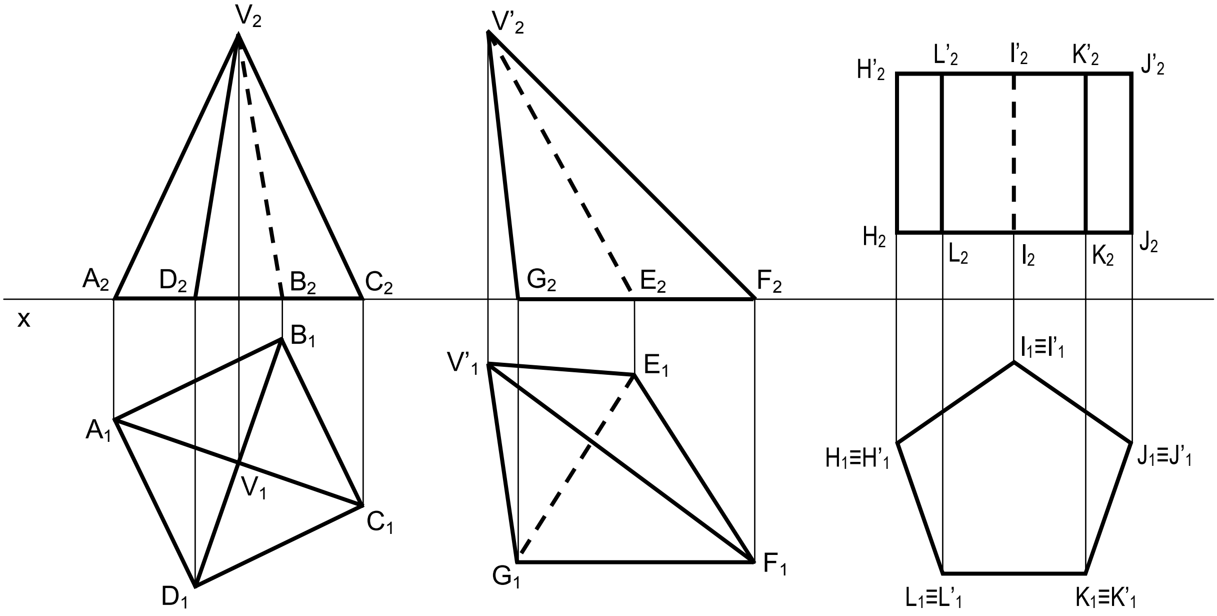
O - Centro
[c] e [c’] - Círculos máximos
[a] e [a’] - Círculos menores

Nomenclatura da pirâmide, do prisma, do cone, do cilindro e da esfera

Junto a cada sólido apresentam-se os termos relativos a estes sólidos, que convém conhecer.

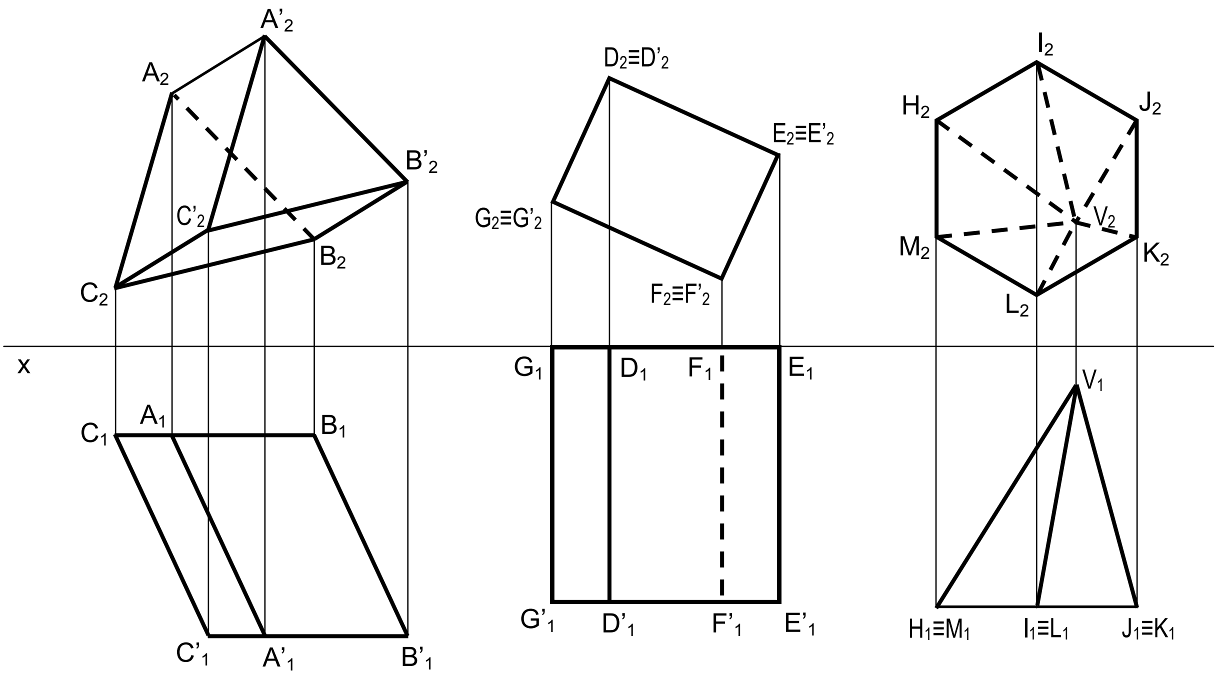
Representação de pirâmides e de prismas com bases projetantes

Nesta página estão representadas pirâmides e prismas com bases horizontais e frontais. Mostram-se sólidos regulares e sólidos oblíquos.



Pirâmides e prisma com bases horizontais

Estão aqui representadas duas pirâmides, uma quadrangular regular, outra triangular oblíqua, e um prisma pentagonal regular. As arestas invisíveis em cada projeção estão representadas a traço interrompido.

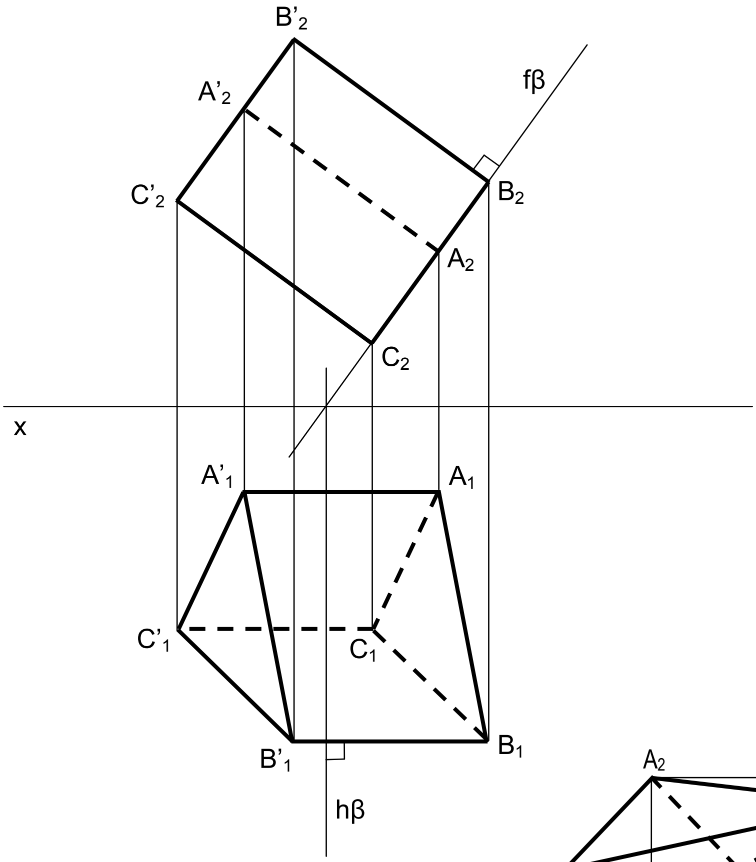


Prismas e pirâmide com bases frontais

Aqui estão dois prismas, um oblíquo, outro reto, e uma pirâmide hexagonal oblíqua. As arestas invisíveis em cada projeção estão representadas a traço interrompido. Quando há sobreposição de arestas invisíveis com visíveis prevalecem, em termos de traçado, as visíveis.

Nesta página estão representadas pirâmides e prismas com bases horizontais e frontais. Mostram-se sólidos regulares, irregulares, retos e oblíquos. É comum, quando se representam sólidos nestas posições, representar o ou um dos planos onde se situa a sua ou uma das suas bases. Esses planos são rebatidos quando não se consegue representar diretamente a base nele contida.

Nos casos em que há rebatimento de polígonos, estes são construídos através da divisão da circunferência ou de outro processo, mostrados no início do capítulo Figuras Planas. Para não sobrecarregar o traçado, não se representam esses processos.

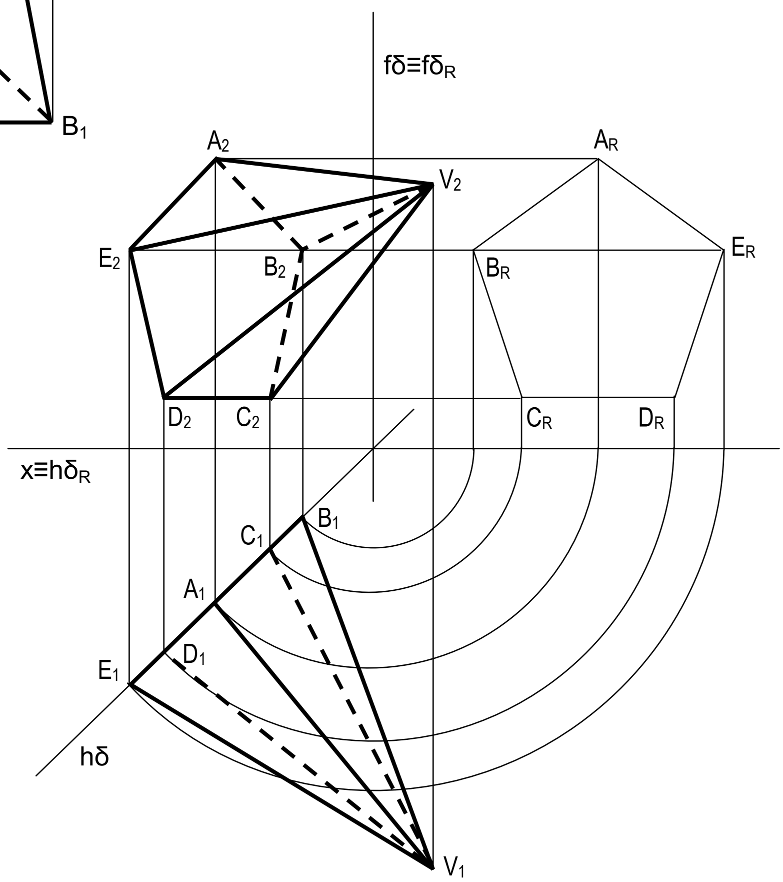


Prisma reto com bases de topo

Partindo do princípio de que as bases deste prisma são triângulos irregulares, podem ser traçados diretamente. Assim sendo, temos uma base sobre o plano θ e outra ao lado desta, obtida na perpendicular a esse plano, por se tratar de um sólido reto.

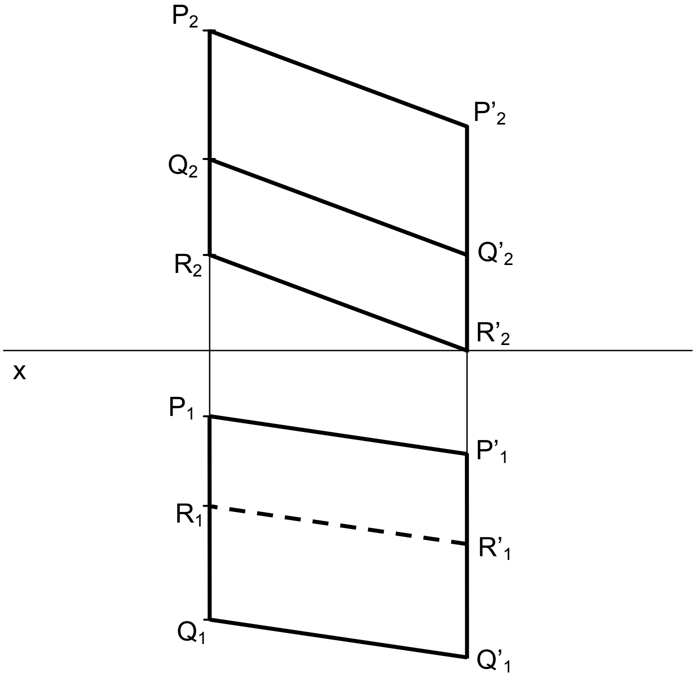
Pirâmide oblíqua com base vertical

Tratando-se de uma base regular, pentagonal neste caso, é necessário rebater o plano que a contém para que esta seja representada nas projeções. Partindo do princípio de que o vértice principal é dado, basta uni-lo aos vértices da base para obter o sólido.



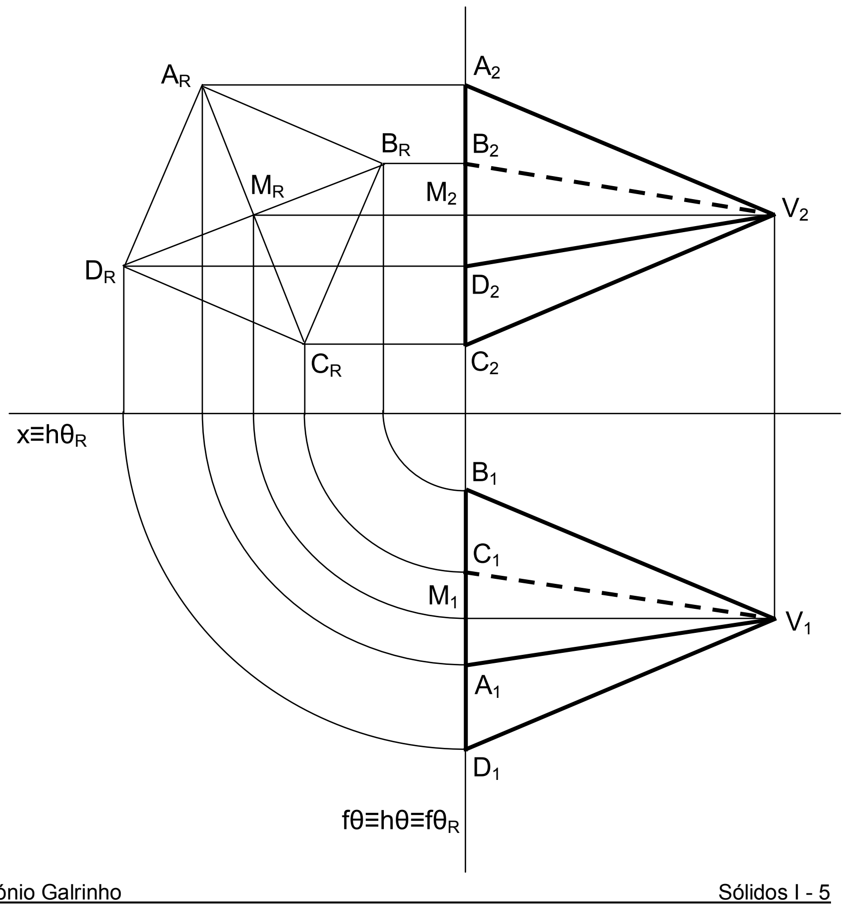
Nesta página mostram-se sólidos de bases poligonais em planos de perfil, num caso com representação direta da base, noutro caso com recurso a rebatimento.

Seja nos casos mostrados nesta página, na anterior ou nas que se seguem, os procedimentos necessários para a representação de um sólido dependem também do modo como um enunciado é apresentado. Assim sendo, não são aqui abordadas algumas possibilidades que, de um modo geral, não trazem dificuldade maior à representação dos sólidos.



Prisma oblíquo com bases de perfil

Parte-se aqui do princípio de que os vértices da base do lado esquerdo foram dados diretamente, pelo que não houve necessidade de proceder a rebatimento. Dados terão sido também os ângulos das projeções das arestas laterais, tal como a altura do sólido.

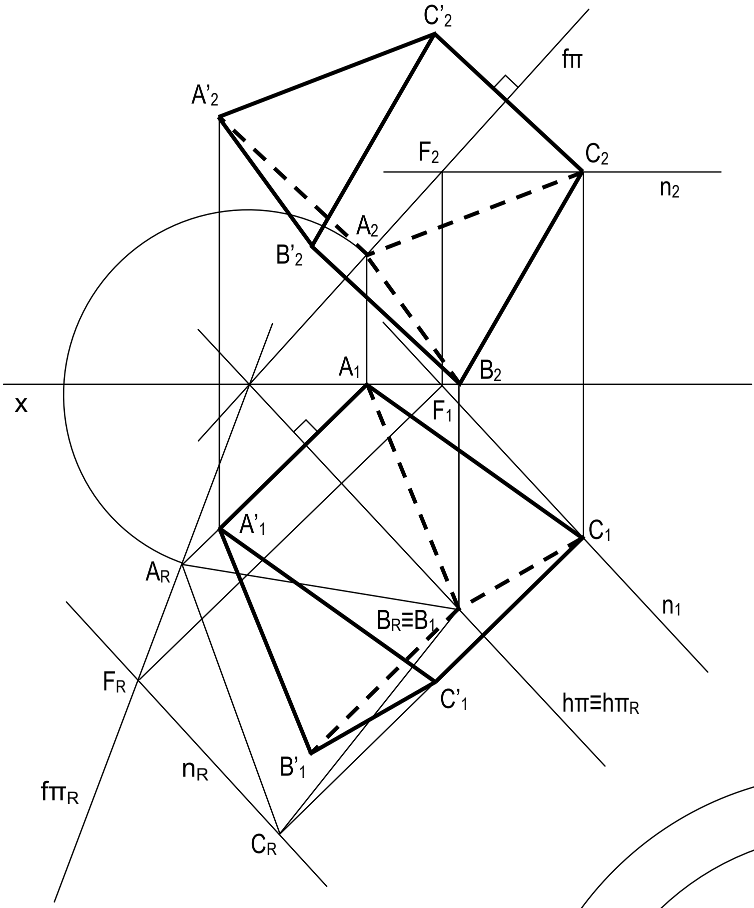


Pirâmide regular com base de perfil

A base desta pirâmide é um quadrado, construído em rebatimento. Tratando-se de um sólido reto, foi determinado o centro da base, ponto M, a partir do qual se traçou o eixo, fronto-horizontal, para determinação do vértice da pirâmide.

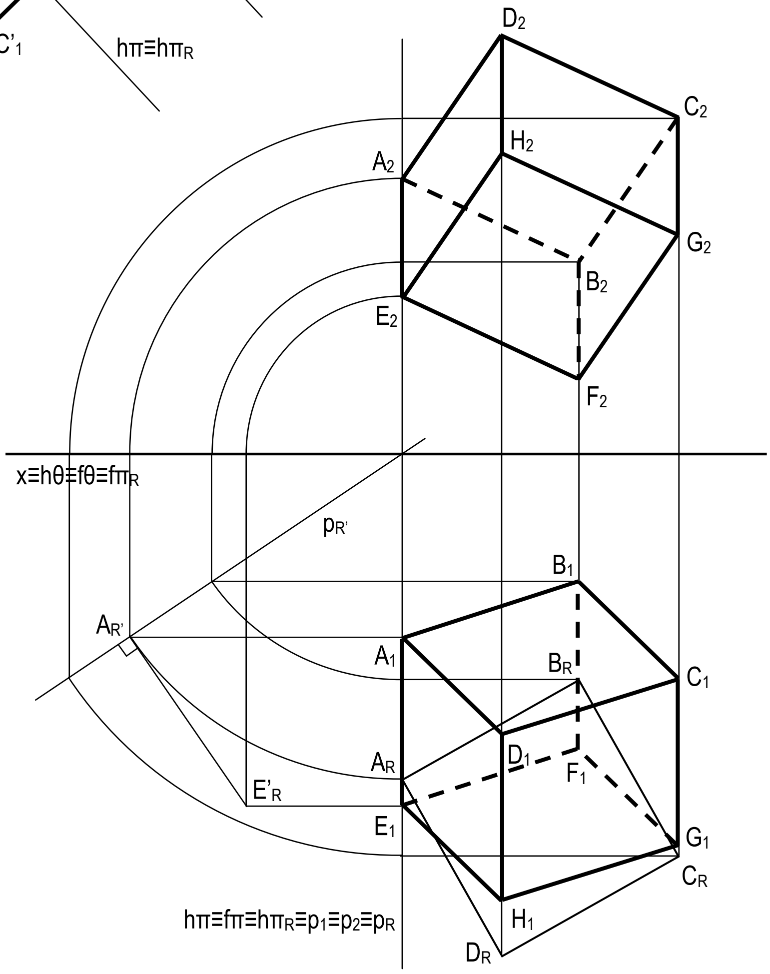
Representação de pirâmides e de prismas com bases não projetantes

Nesta página observam-se dois prismas, um com bases oblíquas, outro com bases de rampa, estando uma delas num plano passante. Recorre-se ao rebatimento para as representar.



Prisma regular com bases oblíquas

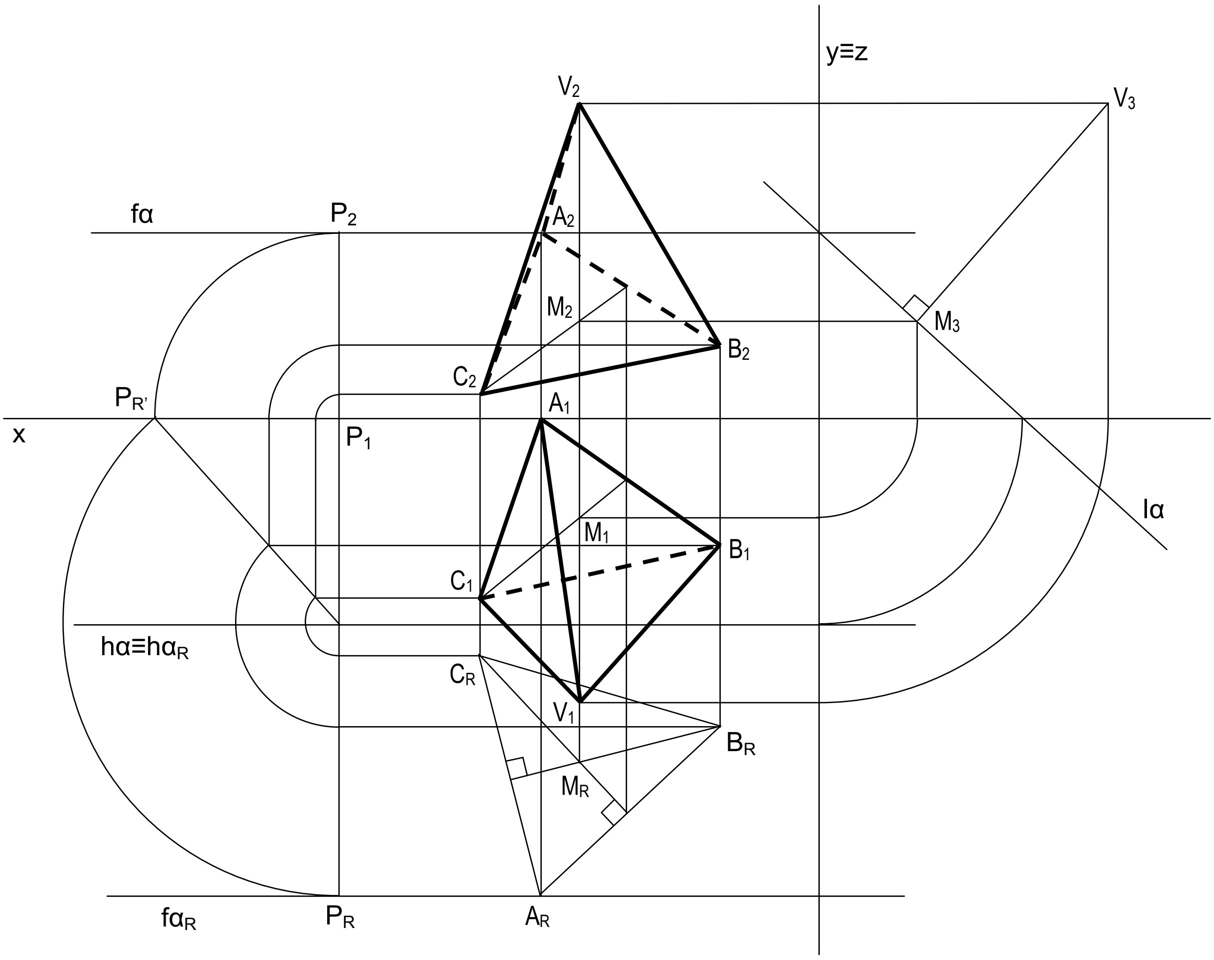
Após representado o triângulo equilátero no plano rebatido, foram traçadas as arestas laterais na perpendicular a esse plano, determinando-se assim a outra base. Não foi aqui atribuída uma altura específica ao sólido.



Cubo com uma face num plano passante

Parte-se aqui do princípio de que é dado o ponto A, e que a partir dele se constrói o quadrado rebatido [ABCD], situado no plano passante. Depois de colocar esse quadrado nas projeções (com recurso ao rebatimento auxiliar do plano e da reta de perfil que contêm o ponto A), procede-se à marcação das restantes arestas do cubo, o que se faz a partir do ponto $E_{R'}$, marcado na perpendicular a $p_{R'}$, tendo esse segmento a medida do lado do quadrado.

Aqui observa-se a representação de uma pirâmide regular com uma base num plano de rampa comum, com a particularidade de ser dada a altura do sólido. Recorre-se ao rebatimento para representar a base e à projeção lateral para representar a altura.

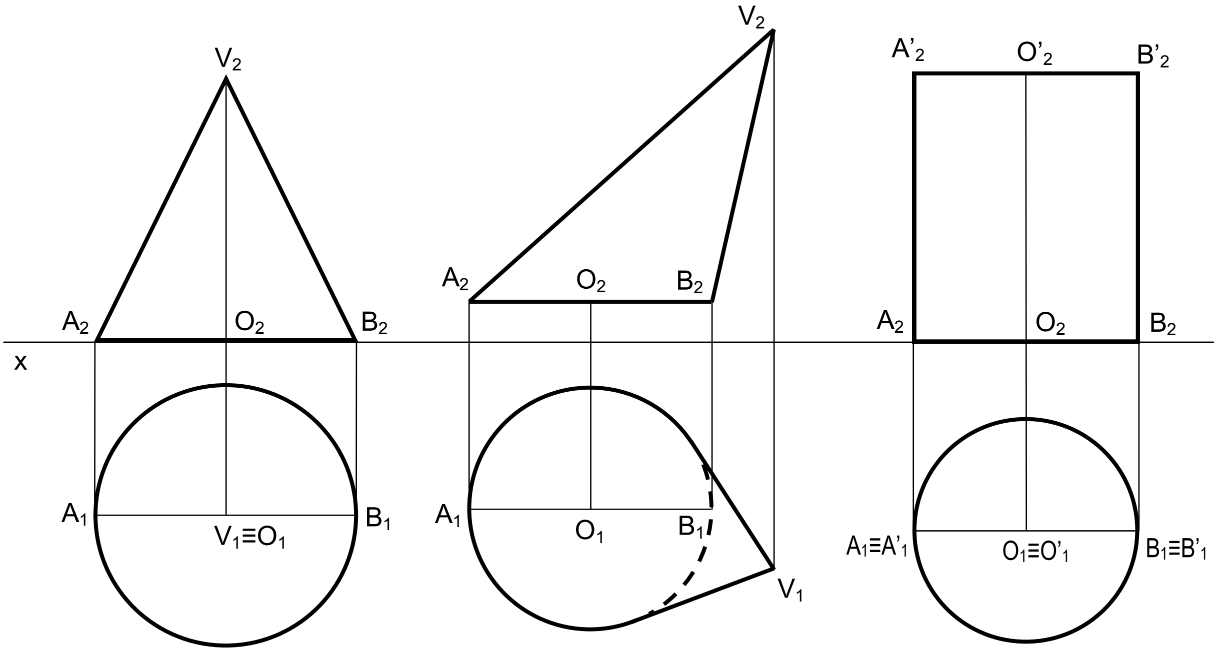


Pirâmide regular com base de rampa

Após representado o triângulo equilátero da base, através do rebatimento do plano, foi determinado o seu centro, ponto M, também no rebatimento. Sendo dada a altura da pirâmide, determinou-se o traço lateral do plano para marcar a medida [M_3V_3], que corresponde a essa altura.

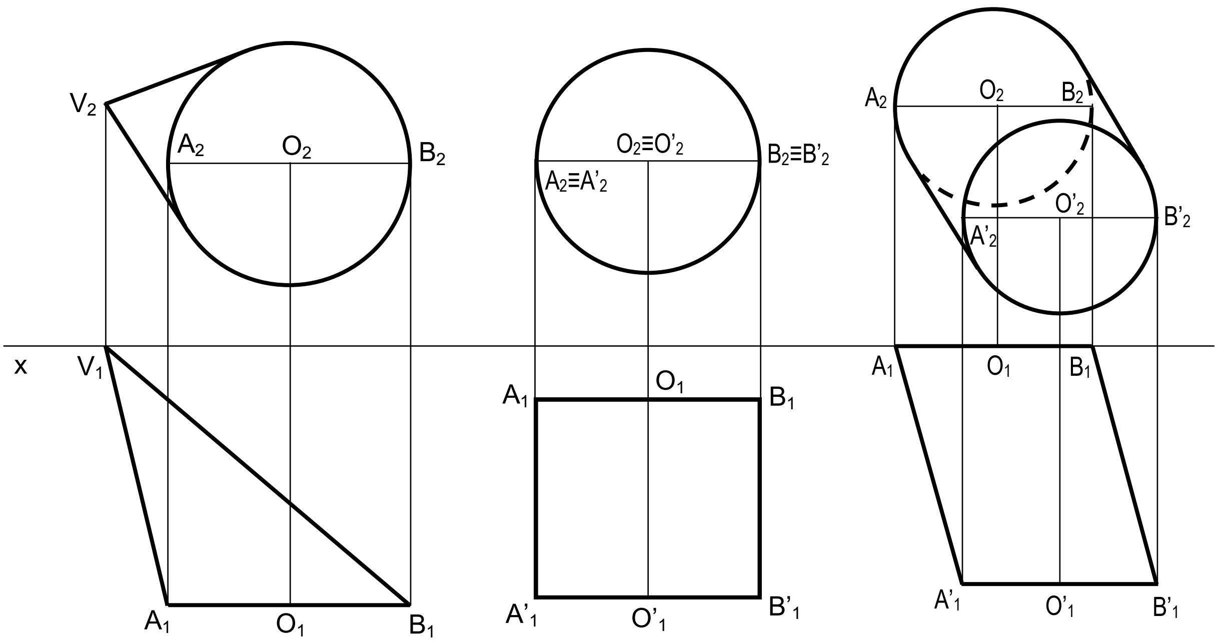
Representação de cones e de cilindros com bases projetantes

Aqui estão representados cones e cilindros com bases horizontais e frontais, uns retos, outros oblíquos. Os cones e cilindros retos designam-se também por sólidos de revolução. Os pontos mais à esquerda e mais à direita das circunferências são utilizados para unirem uma projeção à outra.



Cones e cilindro com bases horizontais

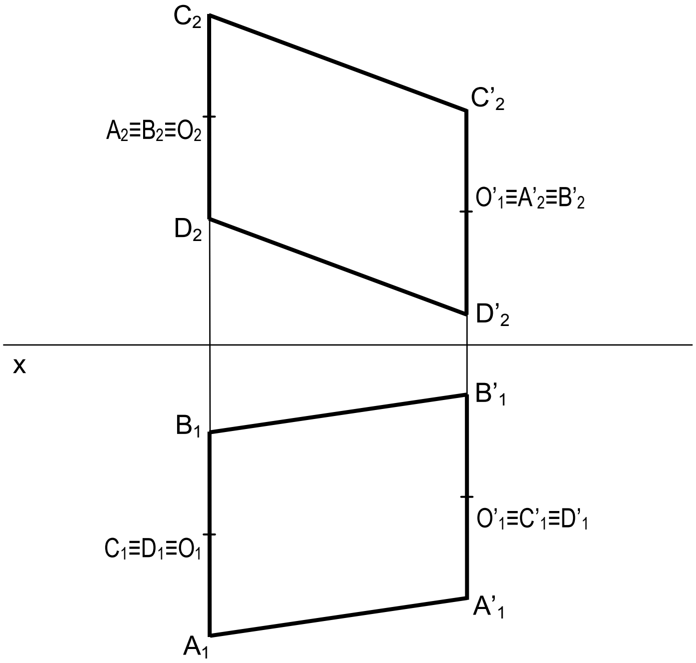
Estão aqui representados dois cones, um reto, outro oblíquo, e um cilindro reto. A parte invisível da circunferência da base do segundo cone está representada a traço interrompido.



Cone e cilindros com bases frontais

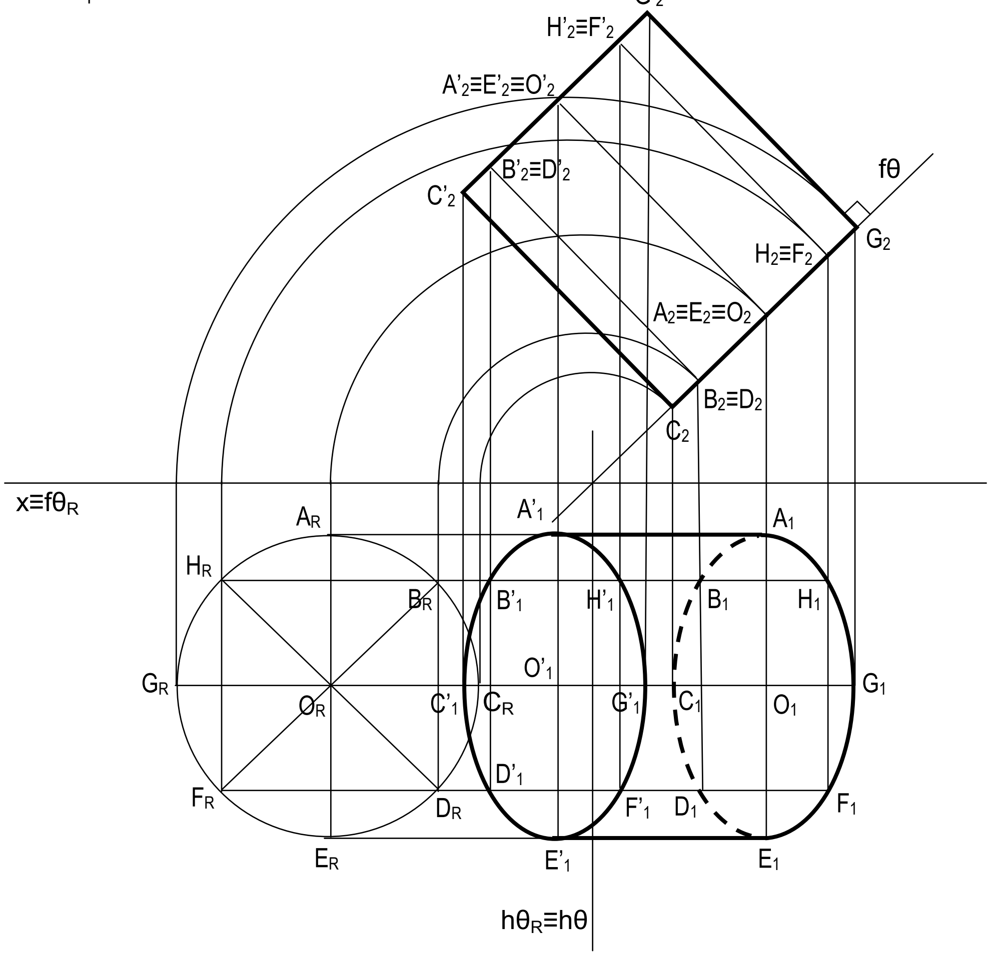
Aqui está um cone oblíquo e dois cilindros, um reto, o outro oblíquo. A parte invisível da circunferência da base do segundo cilindro está representada a traço interrompido.

Nesta página representa-se um cilindro oblíquo com bases de perfil e outro de revolução com bases de topo.



Cilindro oblíquo com bases de perfil

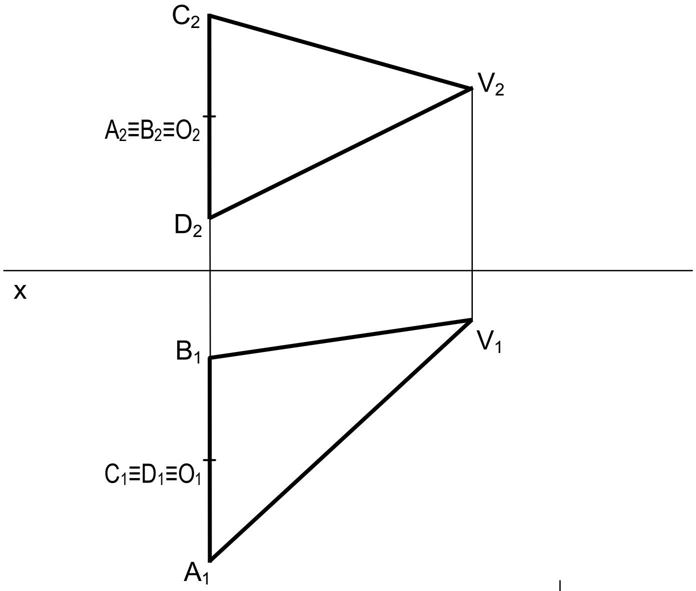
Para representar um cilindro com as bases de perfil basta unir as projeções dessas bases, cujo traçado são segmentos de reta perpendiculares ao eixo x. No entanto, é comum haver necessidade de rebater uma das bases quando se pretende algo mais do que apenas representar o sólido.
Tratando-se de um cilindro de revolução, as suas projeções seriam retangulares.



Cilindro de revolução com bases de topo

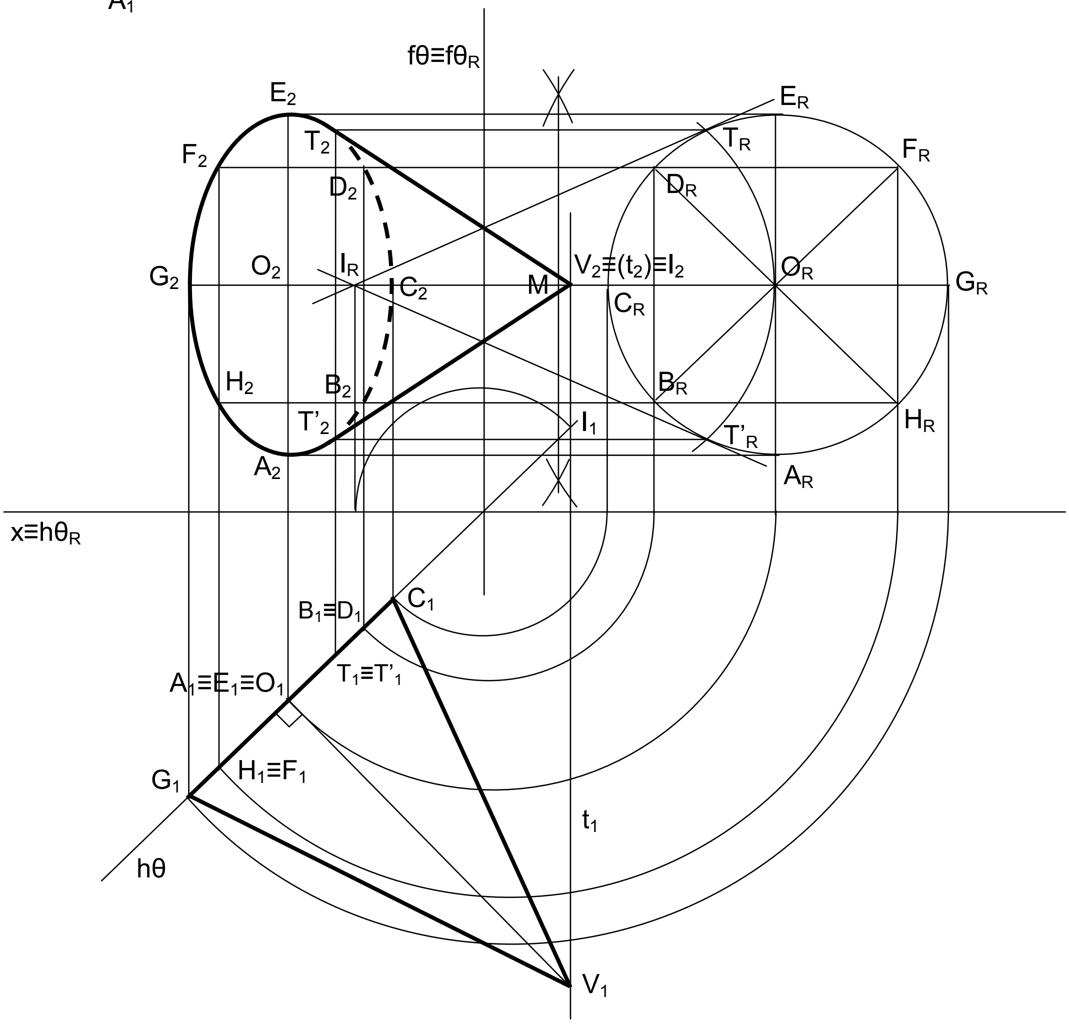
Após representada a circunferência da base que está no plano, com recurso a oito pontos que resultaram da divisão da circunferência em partes iguais, procedeu-se à representação da outra base. Para isso marcou-se a altura do sólido na perpendicular ao traço frontal do plano, assim como as geratrizes que contêm os oito pontos.

Aqui representam-se dois cones, um com base de perfil, outro com base vertical.



Cone oblíquo com base de perfil

Um cone com bases de perfil tem sempre projeções triangulares. Para o representar basta unir as projeções do vértice às da base, cujo traçado são segmentos de reta perpendiculares ao eixo x. No entanto, é comum haver necessidade de rebater uma das bases quando se pretende algo mais do que apenas representar o sólido.
Tratando-se de um cone de revolução, as suas projeções seriam triângulos isósceles.

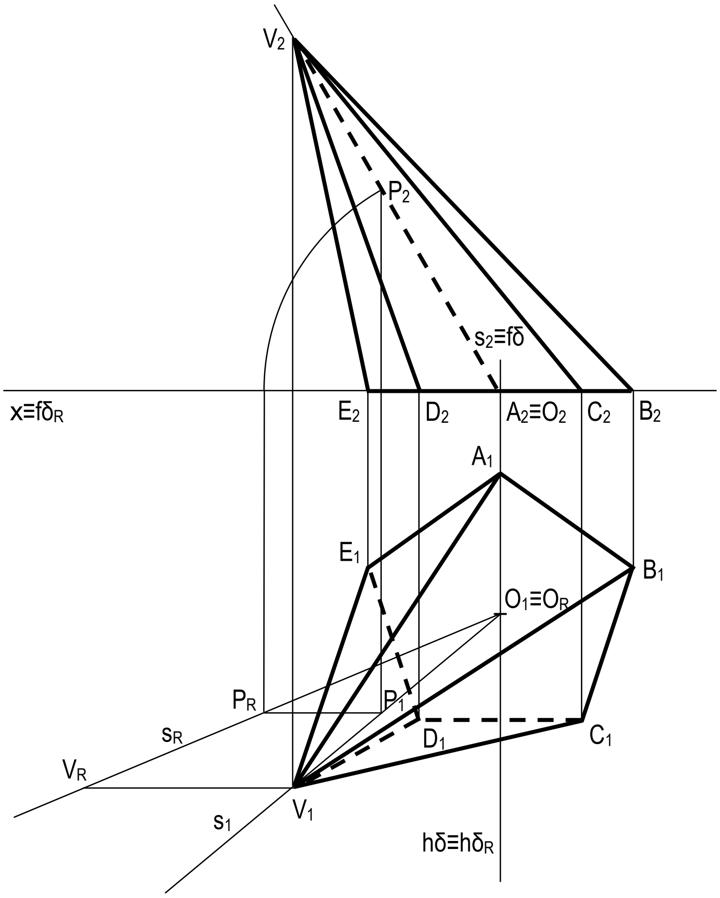


Cone de revolução com base vertical

Na projeção frontal deste cone há que saber com rigor os pontos de tangência, T e T', entre as geratrizes de contorno e a elipse. Esses pontos determinam-se no rebatimento, por meio do ponto I, que resulta da intersecção da reta de topo t (projetante frontal contendo o vértice) com o plano da base. Os pontos de tangência são aqueles em que a elipse passa de visível a invisível.

Representação de sólidos mediante condições específicas

Os dados dum enunciado podem obrigar a procedimentos particulares aquando da representação de um sólido, não permitindo que este se represente de forma tão imediata como sucede nas páginas anteriores. Nesta página observa-se como isso se processa numa pirâmide e num prisma.

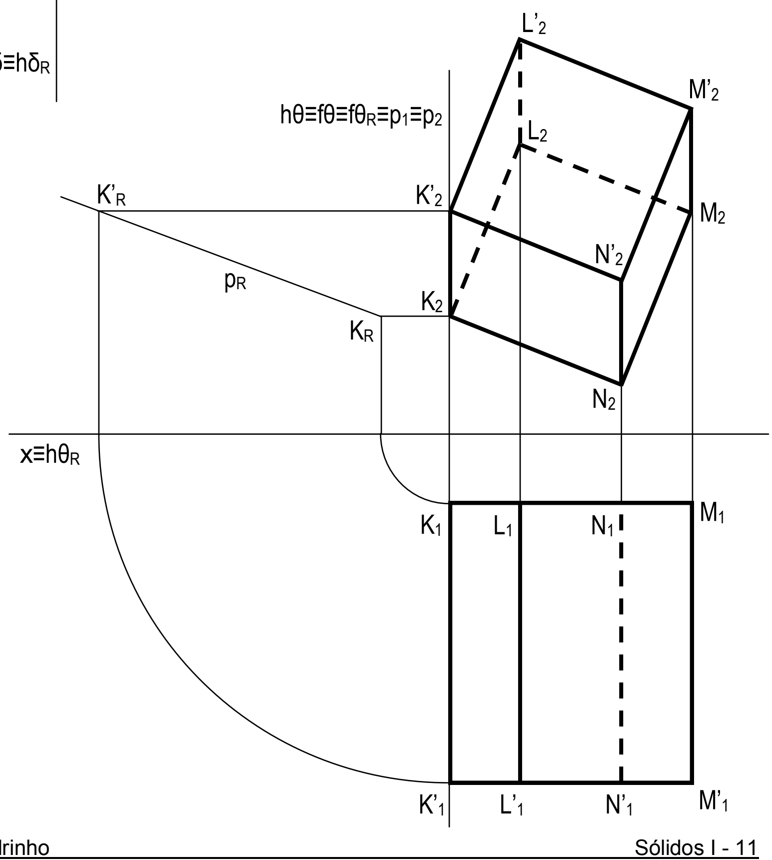


Pirâmide pentagonal oblíqua sendo dados a inclinação e o tamanho do eixo

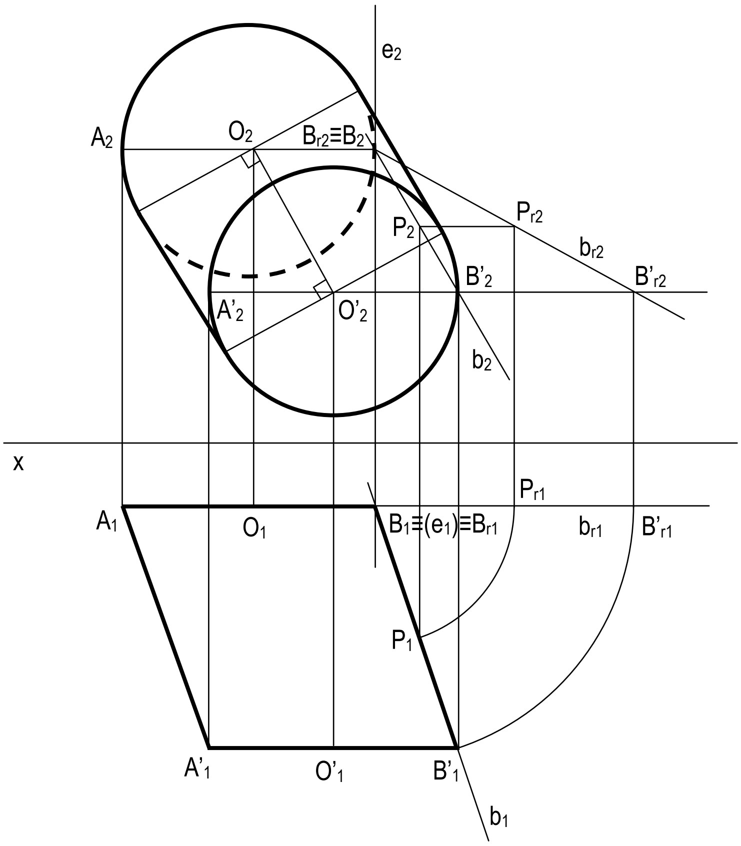
É dado o tamanho do eixo do sólido, que é 6cm, e os ângulos das suas projeções frontal e horizontal, que são 60ºae e 40ºae, respetivamente.
Traça-se a linha auxiliar s, cujas projeções têm as aberturas do eixo, nela se marcando um ponto qualquer. De seguida rebate-se o plano de topo que contém essa linha. É no rebatimento que se marca a VG do tamanho do eixo, entre O_R e V_R. Com o contrarrebatimento obtêm-se as projeções do vértice do sólido.

Prisma quadrangular oblíquo sendo dados a inclinação e a medida das arestas laterais

Aqui é dado o tamanho do eixo do sólido, que é 4cm, e as arestas laterais, que são de perfil, fazendo 70º com o PFP.
Sendo as arestas de perfil, utiliza-se aqui o rebatimento do plano de perfil, neste caso aquele que contém a aresta situada mais à esquerda. No rebatimento traça-se a VG do tamanho e o ângulo da aresta [KK'] sobre a reta de perfil que os contém.
Para a resolução deste tipo de situações é também recomendável o recurso às projeções laterais.



Nesta página observa-se um cilindro e um cone que também não se conseguem representar diretamente. Aqui, como na página anterior, observam-se estas situações com sólidos de bases horizontais e frontais, mas os procedimentos seriam idênticos caso as bases estivessem noutras posições.

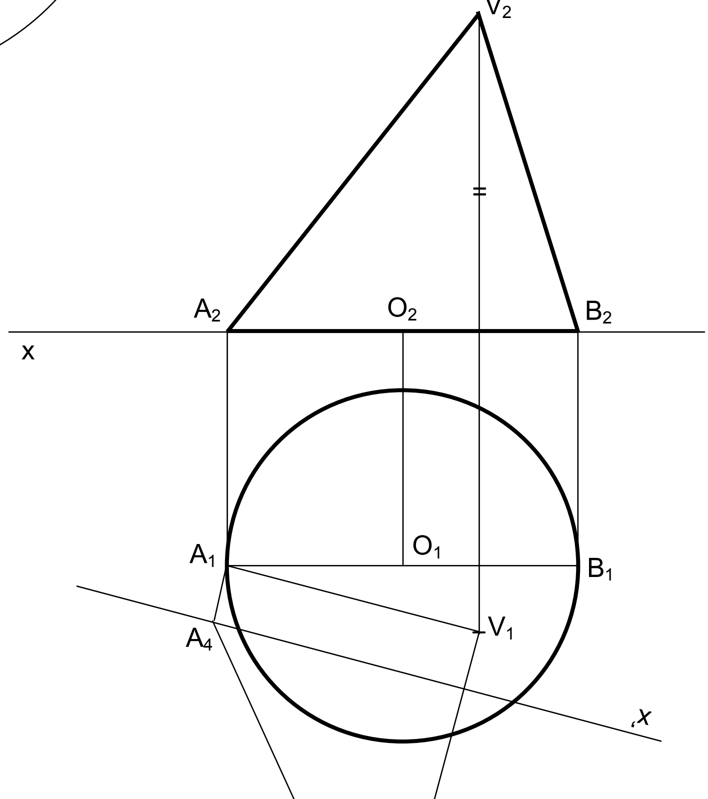


Cilindro oblíquo sendo dados a inclinação e o tamanho das geratrizes

Traçou-se a reta auxiliar b, com a mesma inclinação das projeções frontal e horizontal das geratrizes, que é de 60ºae e 70ºad, respetivamente.
Aqui optou-se por aplicar uma rotação da geratriz situada mais à direita, colocando-a frontal com recurso a um eixo vertical que contém o ponto B. Os 4cm correspondentes à medida das geratrizes estão marcados em VG na reta b rodada, correspondendo à medida $[B_{r2}B'_{r2}]$.

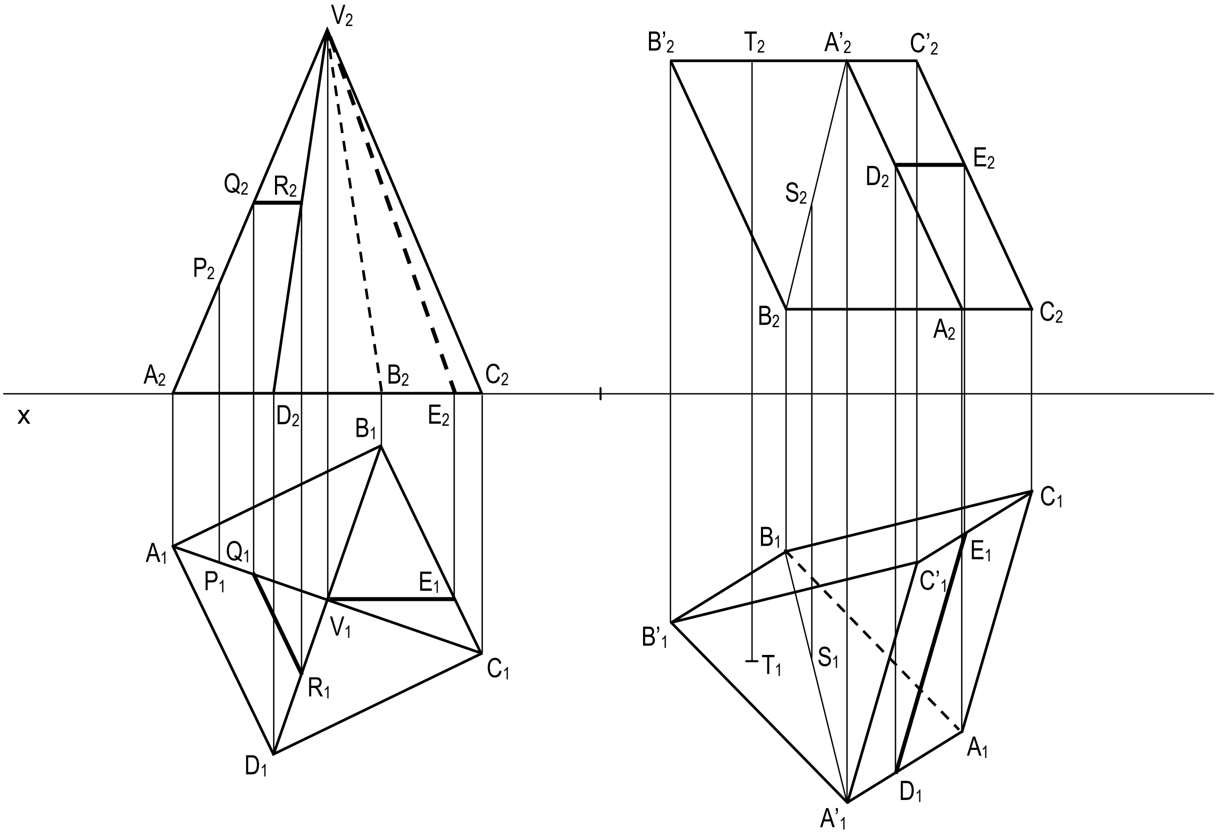
Cone oblíquo sendo dados a inclinação e o tamanho do eixo

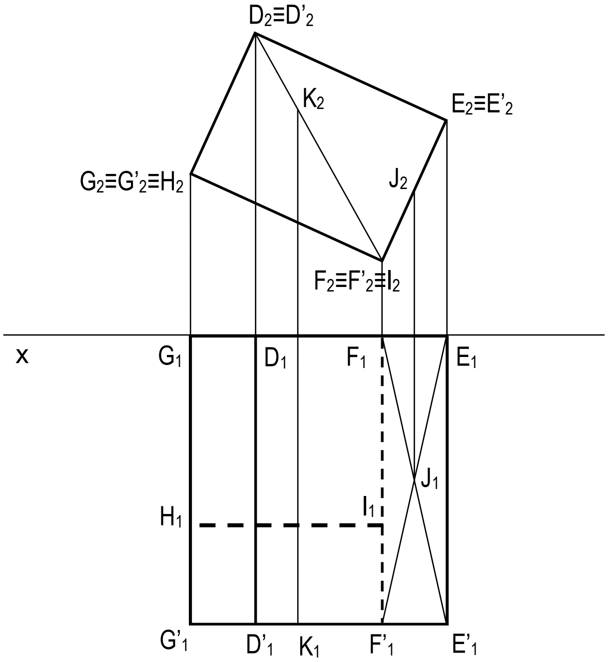
O vértice deste cone tem 4cm de afastamento, situa-se 1cm para a direita do ponto O e sabe-se que a sua geratriz de contorno frontal situada mais à esquerda mede 5,5cm.
Aqui optou-se por utilizar uma mudança de plano, colocando o eixo x' paralelo ao segmento de reta $[A_1V_1]$, para que a geratriz fique frontal. A partir de V_1 traçou-se uma linha de chamada perpendicular a x', com um tamanho qualquer, sobre a qual se marcou V_4 a partir de A_4, com o tamanho de 5,5cm. Passando a cota de V_4 para a projeção principal fica-se a conhecer V_2.



Representação de pontos e de linhas nas superfícies dos sólidos

Nesta página representam-se pontos e linhas nas superfícies de pirâmides e de prismas. Para representar pontos é muitas vezes necessário utilizar linhas auxiliares.





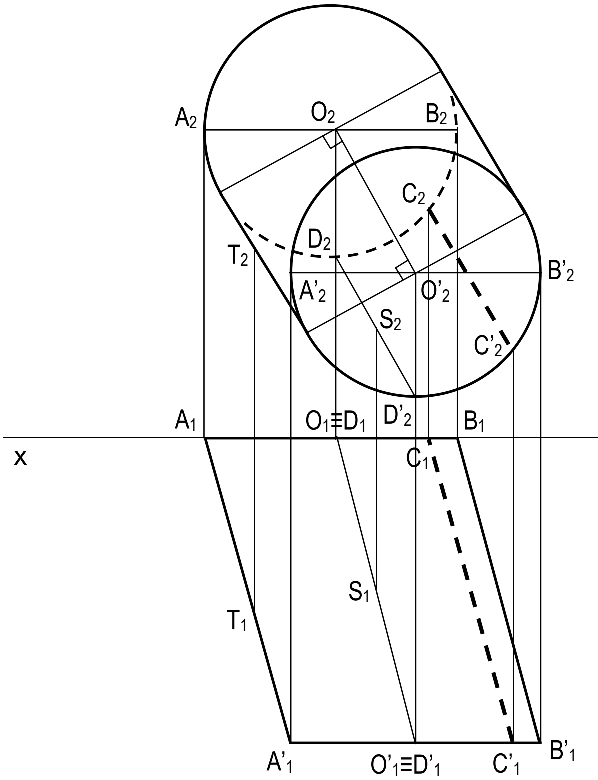
Marcação de pontos e de linhas em pirâmides e em prismas

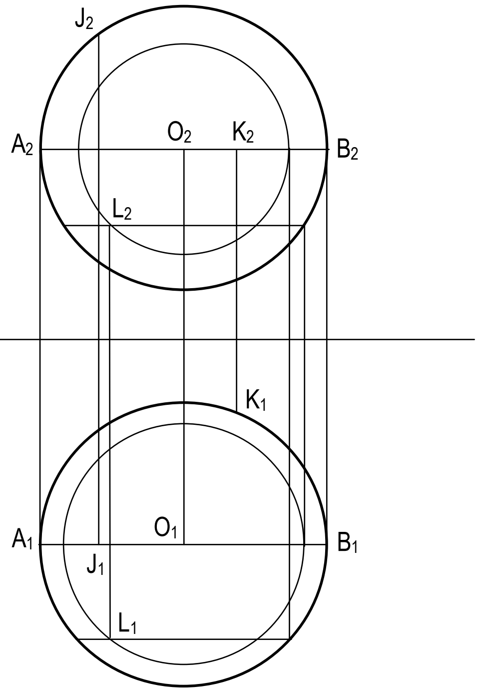
Pirâmide: ponto P, com 1,5cm de cota, situado na aresta [AV]; geratriz frontal [EV], situada na face [BCV]; segmento de reta horizontal [QR], com 2,5cm de cota, situado na face [ADV].

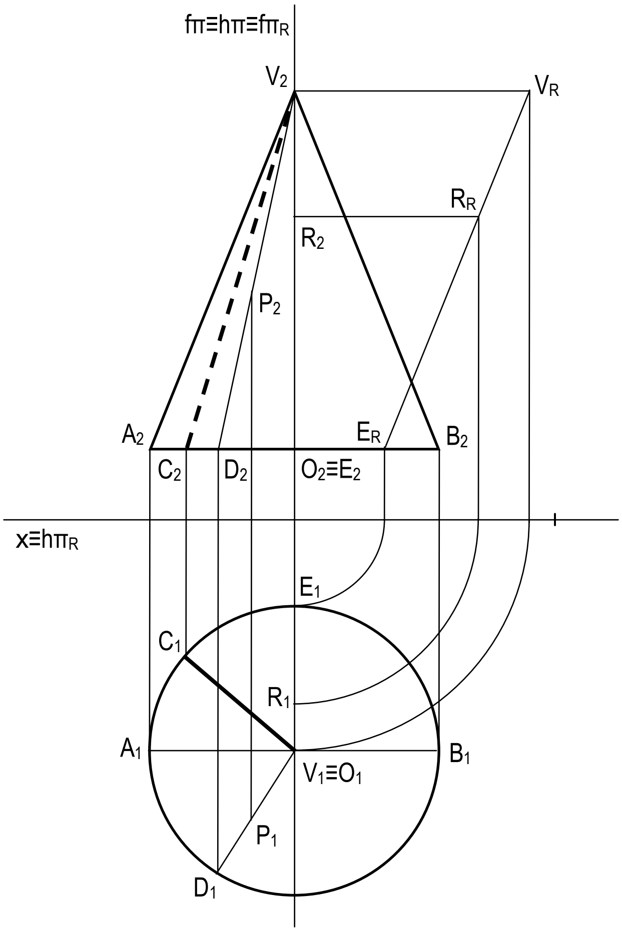
Prisma triangular: ponto S, com 2,5cm de cota, situado na diagonal [A'B]; ponto T, com -2cm de abcissa e 3,5cm de afastamento, situado na base superior; segmento de reta horizontal, com 3cm de cota, situado na face [ACC'A'].

Prisma quadrangular: ponto K, com 3cm de cota, situado na diagonal [D'F']; ponto J, situado no centro da face [EFF'E']; segmento de reta frontal, com 2,5cm de afastamento e situado na face [FGG'F'].

Nesta página representam-se pontos e linhas nas superfícies de um cone, de um cilindro e de uma esfera. Também aqui é muitas vezes necessário utilizar linhas auxiliares para representar pontos.





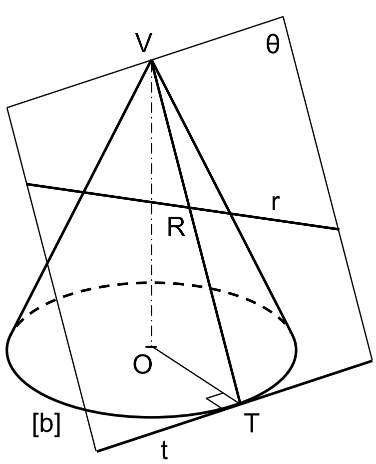


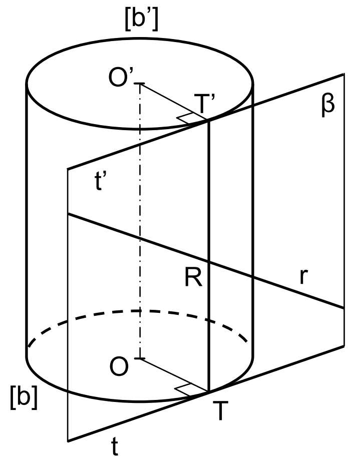
Marcação de pontos e de linhas num cilindro, numa esfera e num cone

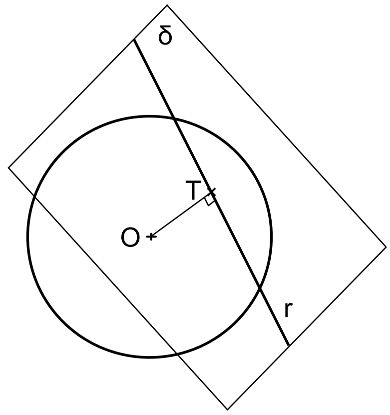
Cilindro: geratriz [CC'], invisível em ambas as projeções; ponto S, com 2cm de afastamento, situado na geratriz que une os pontos de menor cota das bases; ponto T, com 2,5cm de cota, situado na geratriz de contorno frontal situada mais à esquerda;
Esfera: ponto J, com 4cm de cota, situado no círculo máximo frontal à esquerda de O; ponto K, com 1cm de afastamento, situado no círculo máximo horizontal à direita de O; ponto L(4;1,5), situado à esquerda de O.
Cone: aresta [CV], que faz 40ºad em projeção horizontal, sendo invisível em projeção frontal; ponto P, com 4cm de abcissa e 3cm de cota; ponto R, com 4cm de cota, situado na aresta de perfil [EV]. Para marcar este ponto procedeu-se ao rebatimento do plano de perfil que contém essa aresta.

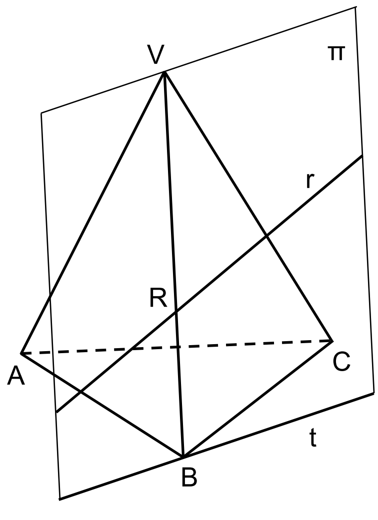
Planos e retas tangentes aos sólidos no espaço

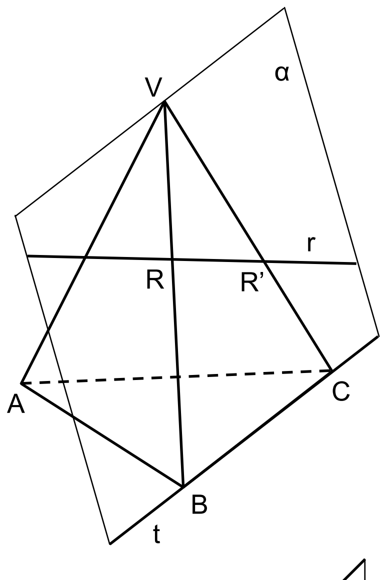
Para que, nas páginas seguintes, se tenha uma perceção correta de planos e de retas tangentes a sólidos, apresentam-se aqui essas situações no espaço.

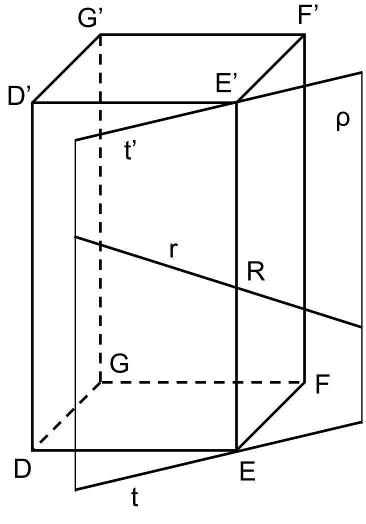


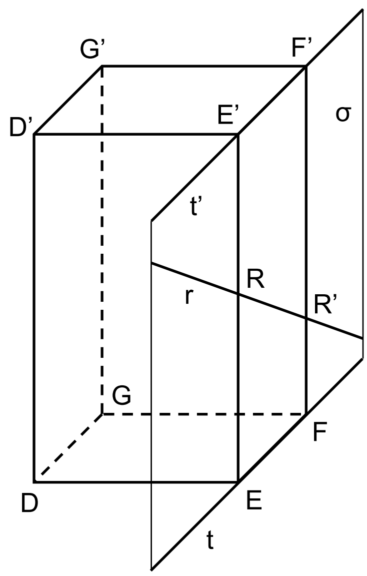












Planos e retas tangentes a sólidos

Um plano tangente a um cone ou a um cilindro contém uma geratriz. O plano θ contém a geratriz [TV], o plano β contém [TT']. Designam-se por tangentes as retas que os planos de tangência têm nos planos da bases, que são t e t'; estas retas são tangentes às bases nos pontos T e T' e perpendiculares aos raios [OT] e [O'T']. Tangentes são também as retas r, que pertencem ao plano tangente e tocam a superfície num ponto.

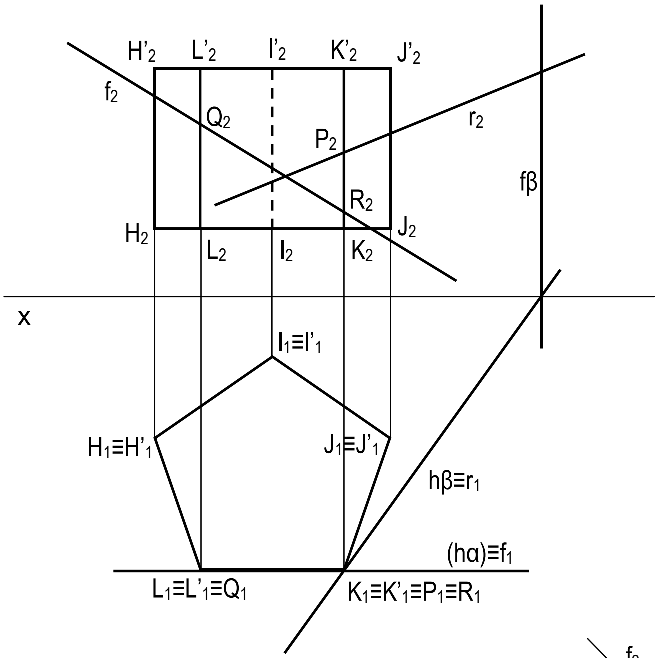
Um plano tangente a uma esfera toca a sua superfície num ponto, designado por ponto de tangência, aqui T. O raio [OT] é perpendicular ao plano e a qualquer reta tangente à superfície nesse ponto.

Existem dois tipos de planos tangentes às pirâmides e aos prismas: os que contêm uma aresta e os que contêm uma face (ou seja, contêm duas arestas). Os planos π e ρ contêm uma aresta; os planos α e σ contêm duas, isto é, uma face lateral.

As retas r representadas nas pirâmides e nos prismas podem ser traçadas diretamente, sem necessidade de as colocar num plano de tangência.

Planos e retas tangentes a prismas e a pirâmides

Podemos considerar a existência de dois tipos de planos tangentes a prismas e a pirâmides: aqueles que contêm uma face e aqueles que contêm apenas uma aresta. As retas tangentes a estes sólidos podem ser traçadas diretamente, mas aqui são representadas dentro de planos tangentes.

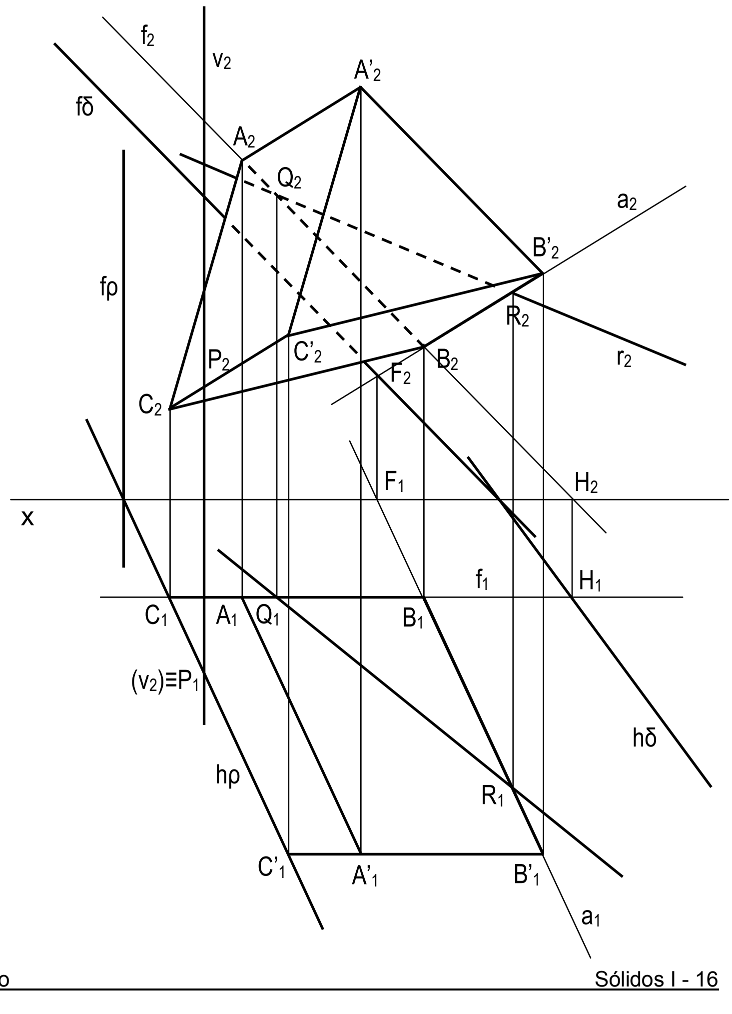


Planos e retas tangentes a um prisma reto

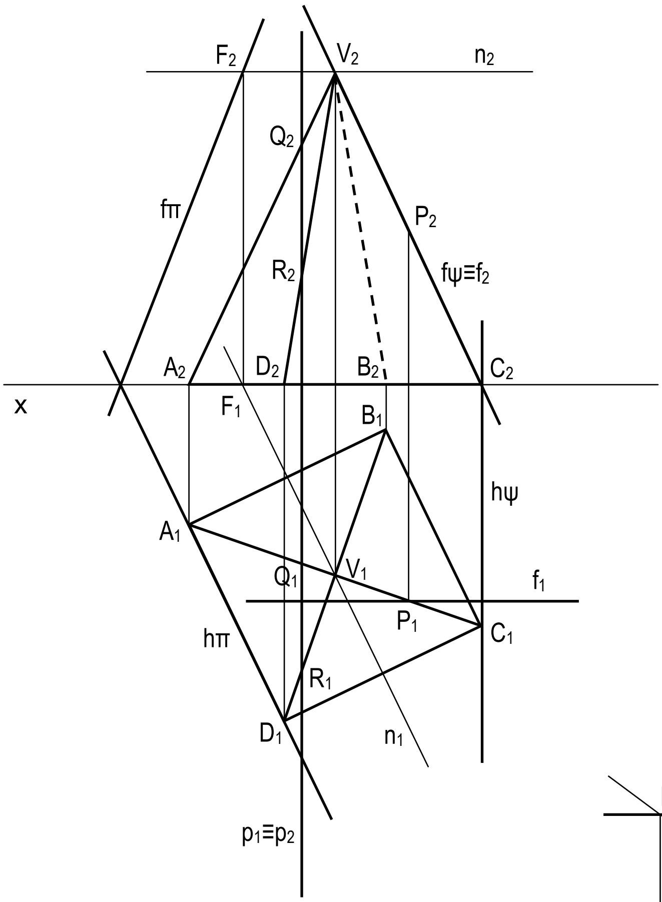
Estão aqui representados dois planos e duas retas tangentes aos sólidos. O plano α é frontal e contém a face [KLL’K’]; a reta f é frontal, está contida nesse plano e cruza as arestas nos pontos Q e R. O plano β é vertical e contém a aresta [KK’]; a reta r é oblíqua, está contida nesse plano e cruza a aresta no ponto P.

Planos e retas tangentes a um prisma oblíquo

Aqui temos um prisma oblíquo, dois planos e duas retas que lhes são tangentes. O plano ρ é vertical e contém a aresta [CC’]; a reta v é vertical, está contida nesse plano e cruza a aresta no ponto P. O plano δ é oblíquo e contém a face [AA’B’B]; a reta r é oblíqua, está contida nesse plano e cruza as arestas nos pontos Q e R. A determinação dos traços do plano oblíquo foi feita com recurso às retas a e f que contêm, respetivamente, as arestas [BB’] e [AB].



Na página anterior observam-se planos e retas tangentes a prismas, nesta observam-se planos e retas tangentes a pirâmides. Também aqui as retas tangentes podem ser traçadas sem os planos.

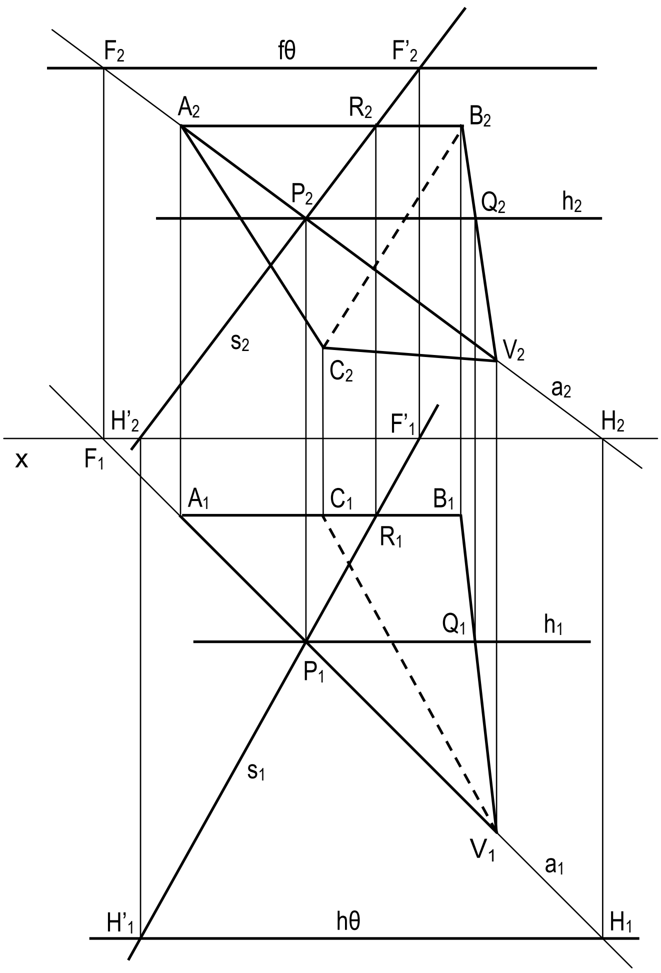


Planos e retas tangentes a uma pirâmide reta

O plano de topo contém a aresta [CV], dentro dele foi traçada a tangente frontal f, que cruza a aresta no ponto P. O plano oblíquo contém a face [ADV], dentro dele foi traçada a tangente de perfil p, que cruza a face nos pontos Q e R. Para determinar o traço frontal do plano utilizou-se a reta horizontal n, que contém V e é paralela à aresta [AD]. O traço horizontal do plano oblíquo contém essa aresta, uma vez que a base se situa no PHP.

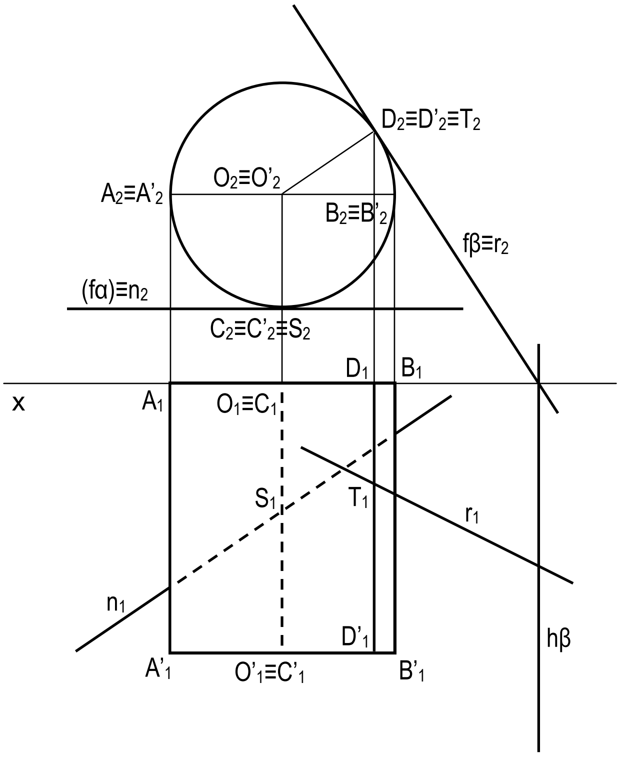
Plano e retas tangentes a uma pirâmide oblíqua

Aqui optou-se por representar apenas um plano tangente, que contém a face [ABV]. Sendo a aresta [AB] fronto-horizontal, o face é de rampa, assim como o plano que a contém, tendo os seus traços sido determinados com auxílio da reta a, que contém a aresta [AV]. Dentro do plano foram traçadas duas retas tangentes, uma fronto-horizontal, que contém os pontos P e Q, e outra oblíqua, que contém os pontos P e R. Foram indicados também os traços desta reta.



Planos e retas tangentes a cilindros, a cones e à esfera

Planos tangentes a cilindros e a cones tocam estes sólidos numa geratriz; as retas tangentes situam -se nesses planos e cruzam essa geratriz. Nesta página observam-se dois cilindros.

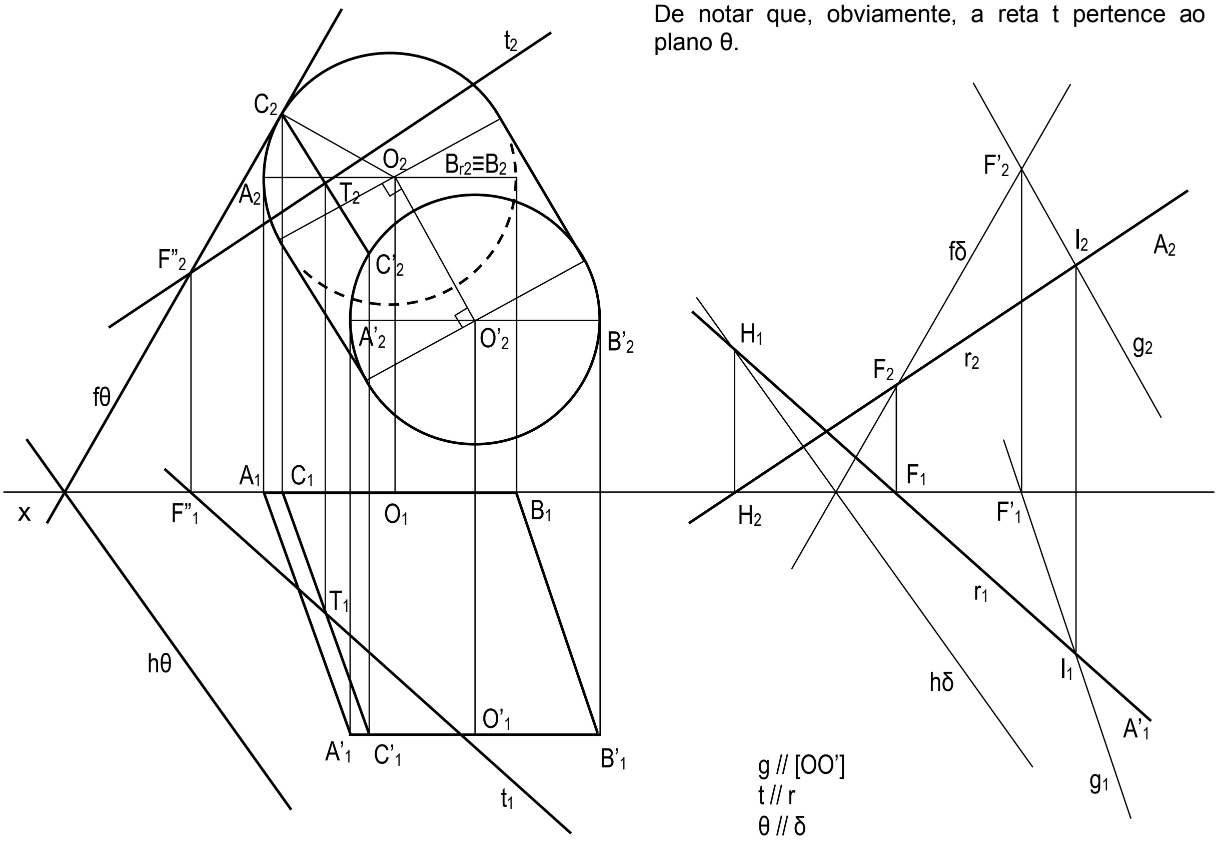


Planos e retas tangentes a um cilindro reto

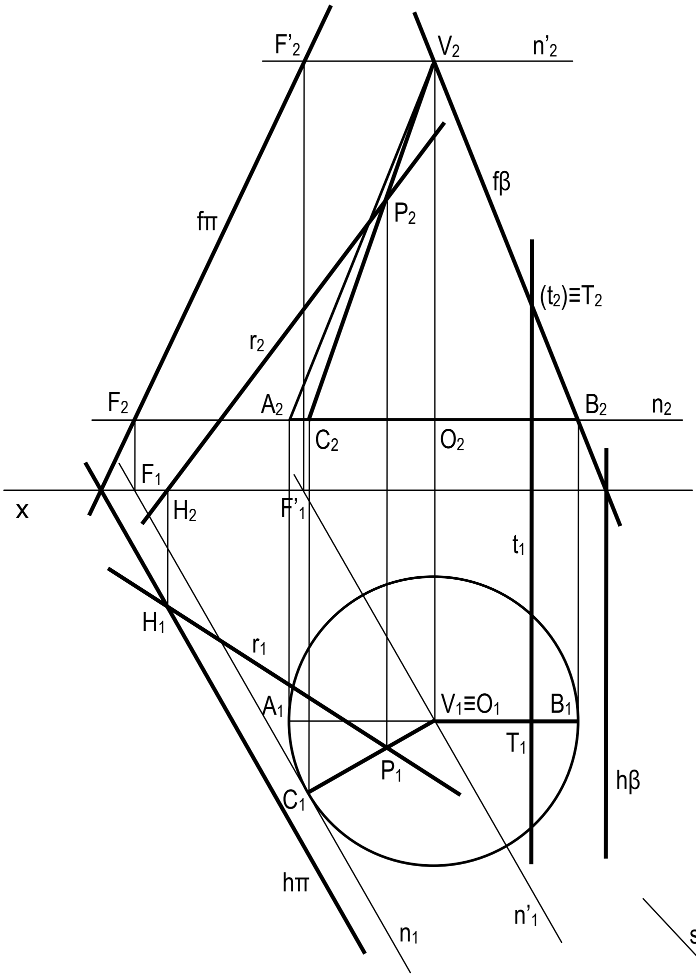
O plano de topo contém a geratriz de topo [DD'] e a reta tangente r, que se cruza com ela no ponto T. O plano horizontal contém a geratriz [CC'] e a reta tangente n, que se cruza com ela no ponto S. T e S são os pontos de tangência de cada uma das retas na superfície do cilindro.

Plano e reta tangentes a um cilindro oblíquo, paralelo a uma reta dada

O caso de baixo envolve maior complexidade, pois pretende-se encontrar um plano e uma reta tangentes ao cilindro, ambos paralelos a uma reta dada. Para encontrar os traços desse plano fez-se cruzar pela reta dada r a reta g, paralela às geratrizes. O plano daí resultante é paralelo aos planos tangentes (há a possibilidade de traçar dois, paralelos entre si, com essas características). O plano tangente θ contém a geratriz [CC']; a reta t é paralela a r e tangente ao sólido no ponto T dessa geratriz. De notar que, obviamente, a reta t pertence ao plano θ.



Nesta página observam-se tangências de planos e de retas a cones, um reto, outro oblíquo.

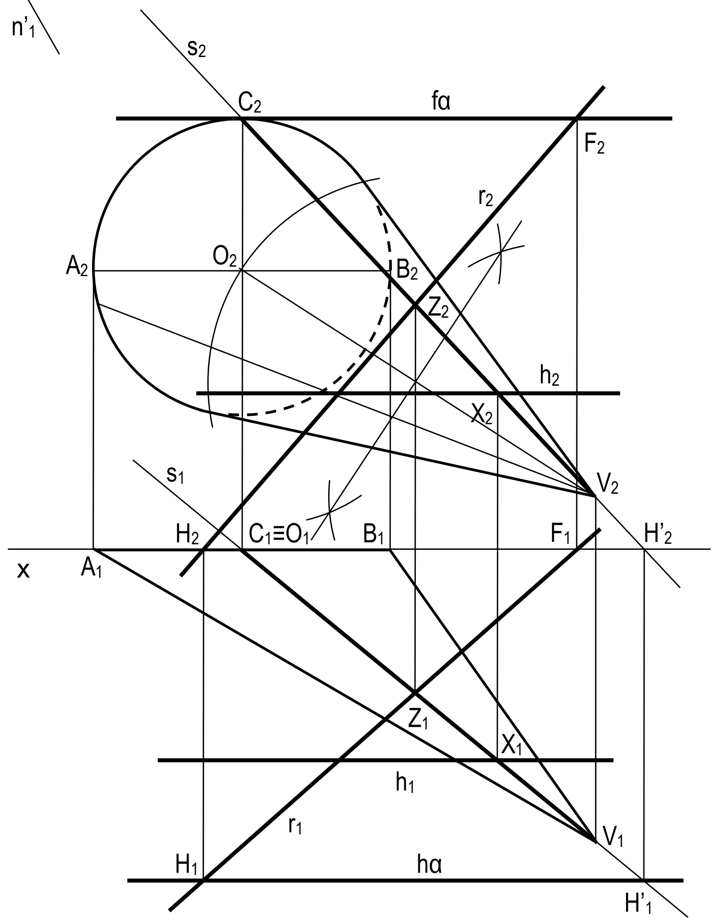


Planos e retas tangentes a um cone reto

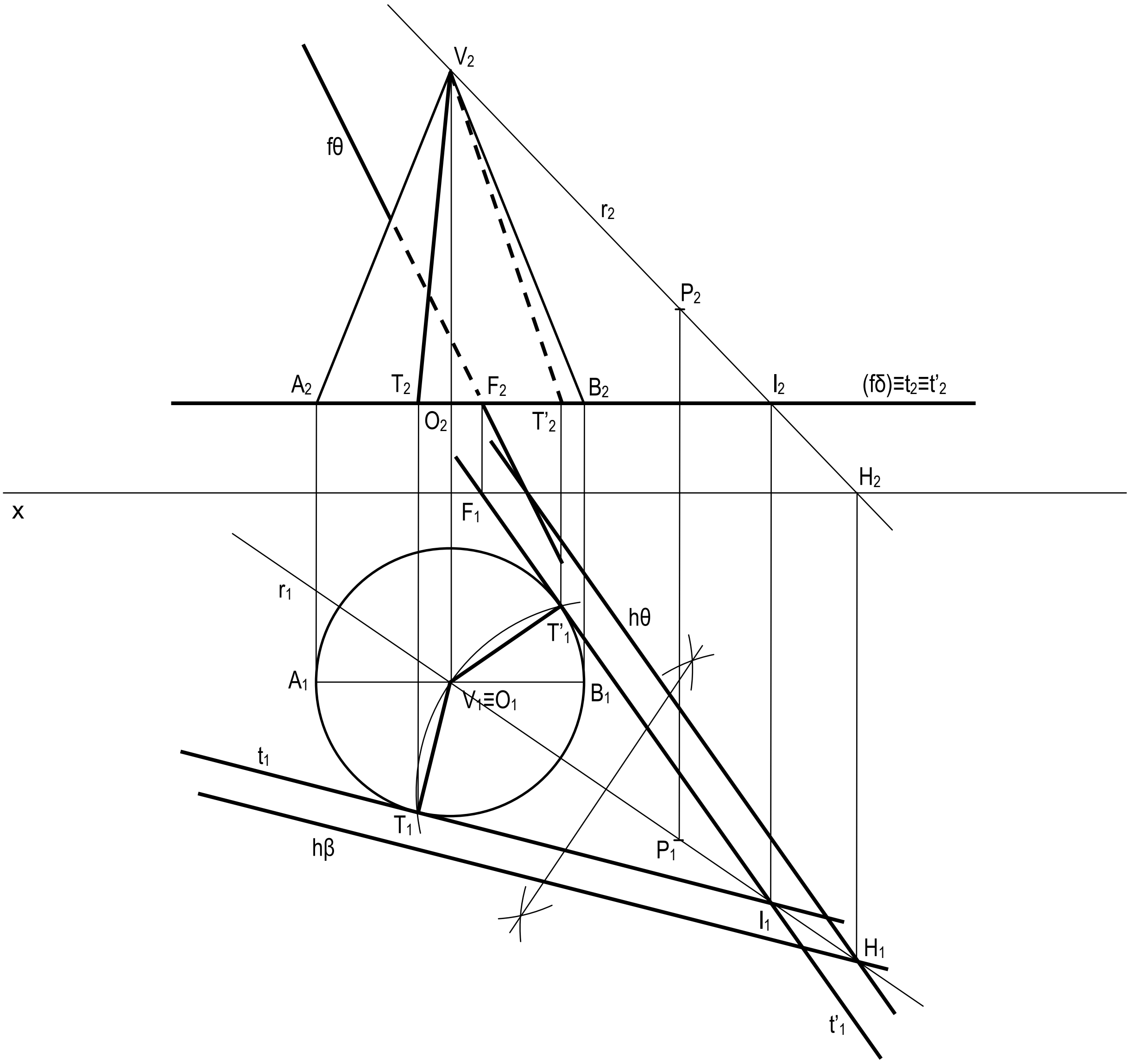
O plano de topo contém a geratriz frontal [BV] e a reta tangente t, de topo, que se cruza com ela no ponto T. O plano oblíquo contém a geratriz [CV] e a reta tangente r, oblíqua que se cruza com ela no ponto P. T e P são os pontos de tangência das retas na superfície do cilindro. Os traços do plano oblíquo foram determinados com auxílio das retas horizontais n e n', contendo respetivamente os pontos C e V, e sendo perpendiculares ao segmento formando por esses pontos.

Plano e retas tangentes a um cone oblíquo

Aqui representa-se apenas um plano de rampa tangente ao cilindro, mas dentro dele duas retas tangentes. Como a base do sólido se situa no PFP, o traço frontal do plano foi traçado diretamente; o traço horizontal foi traçado com recurso à reta s, que contém o segmento de tangência [CV]. A reta r, oblíqua, é tangente ao sólido no ponto Z desse segmento, tendo H e F como traços; a reta h, fronto-horizontal, é tangente no ponto X.



Aqui observam-se mais situações de planos tangentes a cones, desta vez mediante condições específicas.



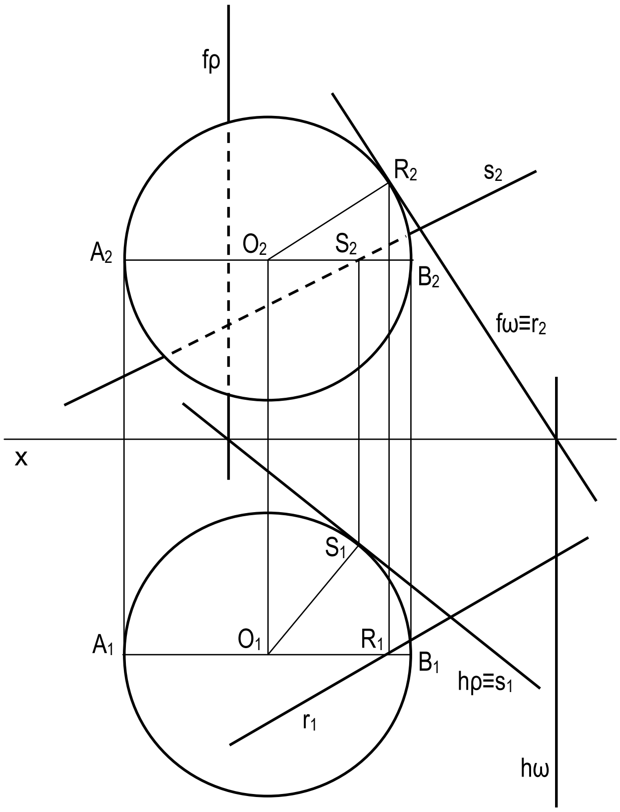
Planos e retas tangentes a um cone reto, contendo um ponto dado

Sendo dado o ponto P, faz-se passar por ele e pelo vértice a reta r. Os planos tangentes que contêm essa reta, contêm também o ponto. No traço horizontal da recta r encontram-se os traços horizontais desses planos. O ponto I é o traço da reta no plano da base, a partir do qual se traçaram as retas t e t', tangentes à circunferência. Essas retas são paralelas aos traços horizontais dos planos. O traço frontal do plano θ foi determinado com recurso ao traço da tangente t'. O traço frontal do plano β fica fora dos limites do papel. As geratrizes de tangência são [VT] e [VT'].
Se a base do sólido se situasse no PHP, as tangentes e os traços dos planos seriam coincidentes.

Planos e retas tangentes a um cone reto, paralelos a uma reta dada

Não se apresenta o traçado relativo a esta situação por ser muito parecido com o da anterior. Se for dada uma reta, basta fazer passar pelo vértice uma paralela a essa. Em tudo o resto o procedimento será igual ao anterior.

Planos tangentes a esferas tocam o sólido num ponto; as retas tangentes situam-se nesses planos e contêm o mesmo ponto.

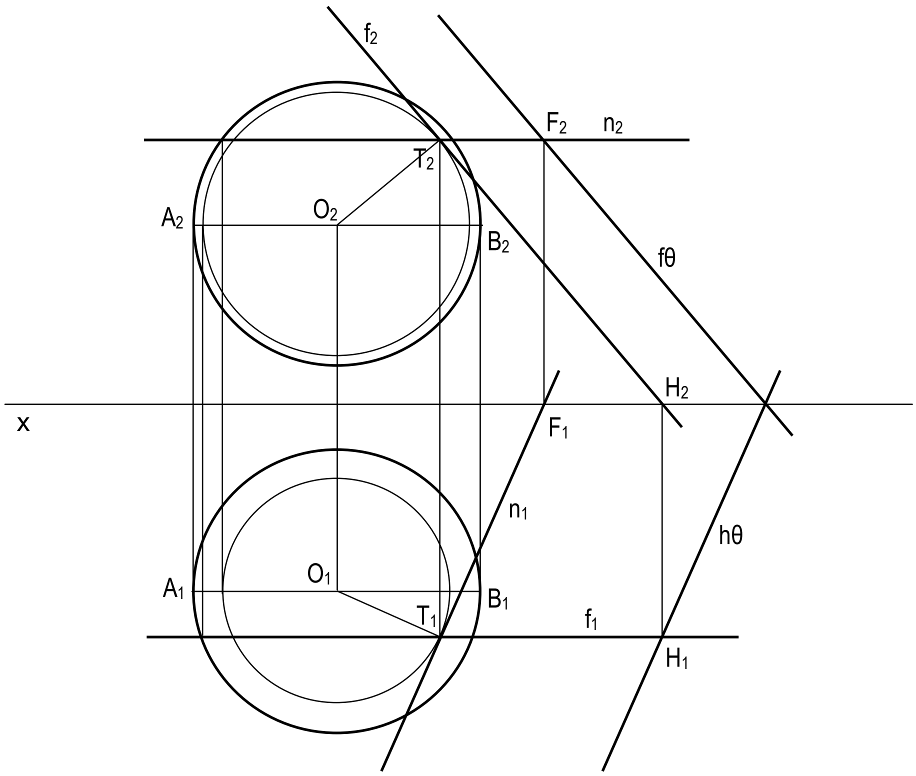


Planos projetantes e retas tangentes a uma esfera

O plano de topo toca a esfera no ponto R e contém a reta r, tangente nesse ponto; o plano vertical toca a esfera no ponto S e contém a reta s, tangente nesse ponto. De notar que os raios [OR] e [OS] são perpendiculares aos planos.
Optou-se aqui por representar retas oblíquas, mas nestes planos outras retas tangentes nos mesmos pontos seriam possíveis: frontal e de topo no plano de topo, horizontal e vertical no plano vertical.

Plano oblíquo e retas tangentes a uma esfera

Parte-se aqui do princípio de que é dado o ponto de tangência T. Por esse ponto traçaram-se duas retas tangentes, n e f, respetivamente horizontal e frontal. Os traços dessas retas permitiram encontrar os traços do plano tangente no mesmo ponto.
O raio [OT] é perpendicular às retas n e f, e também perpendicular ao plano tangente.



Sólidos I – Exercícios

Representação de pontos e de linhas nas superfícies de pirâmides e de prismas

1. Representar uma pirâmide regular com 7cm de altura, cuja base é o triângulo horizontal [ABC], conhecendo os vértices A(4;2;0) e B(-2;2;0). Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - P, com 4cm de cota, situado na aresta mais à esquerda;
   - Q, com 2,5cm de afastamento e 2cm de abcissa, situado na face [ABV];
   - geratriz [DV], que faz 45ºae na projecção horizontal, visível em ambas as projecções.

2. Representar uma pirâmide com vértice principal em V(-3;8;6), cuja base é o quadrado frontal [ABCD], conhecendo os vértices opostos A(2;2;1) e C(0;2;7). Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - geratriz [EV], horizontal;
   - F, com 4cm de cota, situado na aresta da base invisível em projecção frontal;
   - G, com 1cm de abcissa e 3,5cm de cota, situado na face que contém o vértice mais à esquerda.

3. Representar uma pirâmide pentagonal regular, com 7cm de altura, cuja base [ABCDE] se situa no plano de topo ψ, que cruza o eixo x num ponto com -1cm de abcissa e faz 55ºad. Essa base está inscrita numa circunferência de 3,5cm de raio com centro em O(4;3), sendo frontal o seu lado de maior afastamento [CD]. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - P, com 5cm de cota, situado na aresta de menor cota;
   - geratriz [EV], invisível em projeção frontal, tendo E 4cm de cota.

4. Representar um prisma hexagonal regular, com 5cm de altura e bases frontais, sendo [PQRSTU] a de menor afastamento e P(2;1;6) e S(-4;1;5) dois vértices opostos dessa base. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - segmento [AB], de topo, com 1cm de abcissa, invisível em projeção horizontal;
   - D, com -3cm de abcissa e 4cm de afastamento, situado numa face invisível.
   - segmento frontal com 2,5cm de afastamento, situado na base de menor cota.

5. Representar um prisma oblíquo de bases quadradas horizontais, sendo A(-3;0;0) e D(1;1,5;0) dois vértices consecutivos da base de menor cota. O sólido tem 6cm de altura, fazendo as projeções frontais e horizontais das arestas laterais 65ºae e 50ºae, respetivamente. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - P, com 2cm de abcissa e 4cm de cota;
   - R, com 2cm de cota, na aresta do ponto A;
   - Diagonal da face lateral que tem um extremo no vértice situado mais à direita.

6. Representar um prisma reto de bases retangulares com 5cm de altura, sendo [PQRS] a base situada no plano vertical ω, que cruza o eixo x num ponto com 2cm de abcissa e faz 45ºae. P(4;0) e R(4;3) são dois vértices opostos. O lado [PQ] mede 3,5cm sendo Q o vértice me de menor cota. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - segmento vertical [AB], que contém o centro da base situada à direita;
   - M, ponto médio da face que contém P, sendo invisível em projeção horizontal;

7. Representar uma pirâmide reta com 5cm de altura e base quadrada de perfil [ABCD], sendo A (0;0;3) e B(0;5;1) dois vértices consecutivos da base e tendo o vértice V abcissa positiva. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - geratriz [GV], horizontal, visível em projeção frontal;
   - segmento [A'B'], com 2cm de abcissa, paralelo a [AB];
   - P, com 5,5cm de cota e 1cm de abcissa, situado, invisível em projeção frontal.

8. Representar um prisma com bases de perfil, tendo a base à direita os vértices P(-2;2;2), Q(-2;4;6) e R(-2;7;3). A aresta [PP'] é frontal e mede 6cm, tendo P' cota nula. Determinar os seguintes pontos que lhe pertencem:
   - A, com 2cm de abcissa e 3cm de cota, invisível em projeção frontal;
   - B, com 1cm de abcissa, situado na diagonal que tem um extremo em R e é invisível em projeção horizontal.

9. Representar uma pirâmide triangular regular cuja base é [ABC], situada no plano oblíquo ρ, perpendicular ao $\beta_{1/3}$, cujo traço frontal faz 50ºae, cruzando o eixo x num ponto com -2cm de abcissa. Conhecem-se os pontos A(2;1) e B(5;1) e sabe-se que o vértice V tem -3cm de abcissa. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
   - segmento de perfil [AE], visível em projeção horizontal;
   - segmento [JK], paralelo ao lado [AB], com 3cm de cota;
   - P, com 2,5cm de cota e 2cm de abcissa, situado na face invisível em projeção horizontal.

10. Representar um cubo com 6cm de lado, sendo os pontos A(3;4;0) e C(5;0;3) dois vértices opostos da base que se situa no plano de rampa δ. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
    - K, com 6cm de abcissa e 5cm de afastamento, invisível em projeção horizontal;
    - L, com 4cm de afastamento, situado na aresta de menor abcissa;
    - segmento fronto-horizontal [MN], que mede 3cm e é invisível em ambas as projeções.

Representação de pontos e de linhas nas superfícies de cones, cilindros e esferas

11. Representar um cone de revolução com 7cm de altura e base frontal, com 3cm de raio e centro em O(1;0;4). Determinar os seguintes pontos que lhe pertencem:
    - P, com abcissa nula e 2,5cm de cota;
    - Q, com 1cm de abcissa e 6cm de cota;

12. Representar um cone oblíquo de base horizontal com 3cm de raio e centro em O(2;6;6), e vértice em V(-3;0;0). Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
    - geratriz [CV], invisível em projecção frontal, tendo C abcissa nula;
    - R, com 3cm de abcissa e 5cm de cota, invisível em projecção horizontal.

13. Representar um cone de revolução com base de perfil com 3cm de raio e centro em Q(5;4;5) cujo vértice tem abcissa nula. Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
    - geratriz [EV], que faz 30ºae em projeção frontal, sendo visível em ambas as projeções;
    - F, com dois centímetros de cota, situado na circunferência da base, com afastamento superior ao do ponto Q.

14. Representar um cilindro oblíquo com 5cm de altura e bases horizontais com 3cm de raio, sendo a de menor cota a que tem centro em Q(4;9;1). As geratrizes são paralelas ao $\beta_{2/4}$, fazendo as suas projeções frontais 50ºad. Representar os seguintes pontos que lhe pertencem:
    - J, com 4cm de cota, situado na geratriz de contorno esquerdo em projeção horizontal;
    - K, com 3cm de afastamento, situado na geratriz de menor afastamento;
    - L, com 5cm de abcissa e 2,5cm de cota, visível em ambas as projeções.

15. Representar um cilindro de revolução com 4cm de altura e bases frontais com 3,5cm de raio, sendo a de maior afastamento a que tem centro em X(2;6;4). Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
    - geratriz [CC'], de topo, com 6cm de cota, visível em projeção horizontal;
    - geratriz [DD'], oposta à anterior;
    - P, com abcissa nula e 5cm de afastamento, invisível em projeção horizontal.

16. Representar o cilindro de revolução com 5cm de altura e bases de perfil com 3cm de raio, tendo a da direita centro em O(-4;4;4). Determinar os seguintes elementos que lhe pertencem:
    - geratriz [GG'], com 2cm de cota, sendo visível em projeção frontal;
    - R, com 5cm de cota e -2cm de abcissa, visível em ambas as projeções.
    - S, com 2cm de cota, situado na circunferência da base esquerda, com afastamento superior ao de O.

17. Representar a esfera com centro em O(2;4;5), com 3cm de raio. Determinar os seguintes pontos que lhe pertencem:
    - P(1;?;7), visível em projeção frontal;
    - R(3;3;?), invisível em projeção frontal.

18. Representar a esfera com centro em Q(-1;3;4), com 3cm de raio. Determinar os seguintes pontos que lhe pertencem:
    - S e R, com abcissa nula e 5,5cm de cota;
    - T e U, com -2 de abcissa e situados no $\beta_{1/3}$.

Representação de sólidos mediante condições específicas

19. Representar uma pirâmide pentagonal oblíqua de base frontal, inscrita numa circunferência com 3cm de raio e centro em X(3;1;4), sendo fronto-horizontal o seu lado de menor cota. A aresta lateral mais à direita mede 7cm, fazendo as suas projeções frontal e horizontal 20ºad e 65ºad, respetivamente.

20. Representar um prisma hexagonal oblíquo de bases horizontais, estando a de maior cota inscrita numa circunferência com 3cm de raio e centro em O(-4;7;3). Duas faces do prisma são de topo. As arestas laterais medem 8cm e são paralelas ao $\beta_{2/4}$, fazendo as suas projeções frontais 70ºad.

21. Representar um cone oblíquo com base horizontal com 3cm de raio e centro em Q(5;3;6). A geratriz de contorno direito é de perfil e mede 7,5cm, situando-se o vértice V no PHP.

22. Representar um cilindro oblíquo de bases frontais com 2,5cm de raio, tendo a de menor afastamento centro em O(-1;0;3). A de maior afastamento tem centro em O', com 3cm de abcissa e 4,5cm de cota. O eixo [OO'] mede 7cm.

23. Representar uma pirâmide com a base no plano vertical α, que cruza o eixo x num ponto com -4cm de abcissa, fazendo 60ºae. A(1;6), B(3;1) e C(6;3) são os vértices da base. O vértice V tem afastamento nulo e 4cm de abcissa. A aresta [BV] mede 7,5cm.

24. Representar um cilindro oblíquo de bases de perfil com 2cm de raio, tendo a da esquerda centro em O(5;4;3). As geratrizes medem 6cm e são paralelas ao $\beta_{1/3}$, fazendo as projeções frontais 35ºad.

25. Representar uma pirâmide regular com 8cm de altura, cuja base é o quadrado [ABCD], com 4cm de lado, situada no plano oblíquo π, que cruza o eixo x no ponto de abcissa nula, fazendo os seus traços frontal e horizontal 45ºae e 55ºae, respetivamente. Conhece-se A(0;2) e sabe-se que B se situa no traço horizontal do plano.

26. Representar a pirâmide com 7cm de altura, cuja base é o triângulo equilátero de rampa [ABC], conhecendo A(2;0;4) e B(2;2;0) e sabendo que C tem abcissa positiva. O eixo do sólido é de perfil e paralelo ao $\beta_{1/3}$.

(Continuação)

27. Representar um cilindro com 6cm de altura e bases com 2,5cm de raio, uma delas com centro em Q(4;3;2), situada no plano de rampa θ cujo traço frontal tem 4,5cm de cota. A geratriz de menor afastamento está contida numa reta passante de perfil.

28. Representar uma pirâmide cuja base é o triângulo equilátero [ABC] situado no plano passante ψ, conhecendo A(6;1;2) e B(0;1;2). A geratriz [MV] é de perfil e mede 7cm, sendo M o ponto médio do lado [AB] e estando V situado no PHP.

Planos e retas tangentes a pirâmides e a prismas

29. Representar uma pirâmide regular com 7cm de altura, cuja base é o triângulo horizontal [ABC], conhecendo os vértices A(4;2;0) e B(-2;2;0). Determinar:
- traços do plano de topo ω, que contém a aresta mais à esquerda;
- reta r, paralela ao $\beta_{2/4}$, tangente no ponto T, com 3cm de afastamento, situado nessa aresta.

30. Representar a pirâmide do exercício anterior. Determinar:
- traços do plano oblíquo ρ, que contém a face [BCV];
- reta frontal f, desse plano, com 3cm de afastamento, indicando os pontos R e S onde a reta cruza as arestas do sólido.

31. Representar uma pirâmide com vértice principal em V(-3;8;6), cuja base é o quadrado frontal [ABCD], conhecendo os vértices opostos A(2;2;1) e C(0;2;7). Determinar:
- reta vertical v com 1cm de abcissa, tangente numa aresta lateral do sólido no ponto P;
- traços do plano δ, que contém a face lateral mais à esquerda.

32. Representar um prisma hexagonal regular, com 5cm de altura e bases frontais, sendo [PQRSTU] a de menor afastamento e P(2;1;6) e S(-4;1;5) dois vértices opostos. Determinar:
- reta s, cuja projeção horizontal faz 45ºad, contendo o ponto P e cruzando a aresta lateral de maior cota no ponto Z;
- reta p, de perfil, que cruza a aresta situada mais à direita no ponto K, com 3cm de afastamento, fazendo 35º com o PHP.

33. Representar uma pirâmide reta com 5cm de altura e base quadrada de perfil [ABCD], sendo A(0;0;3) e B(0;5;1) dois vértices consecutivos da base e tendo o vértice V abcissa positiva. Determinar:
- traços do plano de topo π, contendo a aresta lateral [BV];
- reta a, passante e contida em π, tangente ao sólido no ponto T com 3cm de abcissa;
- reta n, horizontal, que contém D e cruza a aresta de maior cota no ponto U.

Planos e retas tangentes a cones, a cilindros e à esfera

34. Representar um cone de revolução com 7cm de altura e base frontal, com 3cm de raio e centro em O(1;0;4). Determinar:
- reta fronto-horizontal h, tangente ao sólido no ponto E, com 6cm de cota, situado na geratriz de perfil com maior cota
- traços do plano tangente θ, que contém a geratriz [FV], cuja projeção frontal faz 40ºae e é visível em ambas as projeções.

35. Representar o cone do exercício anterior. Determinar:
- traços (que caibam no espaço do desenho) dos planos α e π, tangentes ao cone e contendo P(-3;3;6);
- geratrizes de tangência desses planos.

36. Representar um cone oblíquo de base horizontal com 3cm de raio e centro em O(2;6;6), sendo V(-3;0;0). Determinar:
- recta vertical v, com abcissa nula, tangente em P numa geratriz de contorno horizontal;
- recta horizontal n, tangente em T, com 4cm de cota, situado na geratriz de contorno esquerdo em projecção frontal.

37. Representar um cilindro oblíquo com 6cm de altura e bases horizontais com 3cm de raio, sendo a de menor cota a que tem centro em Q(4;9;0). As geratrizes são paralelas ao $\beta_{2/4}$, fazendo as suas projeções frontais 50ºad. Determinar:
- traços dos planos δ e ω, tangentes ao sólidos, contendo P(-3;2;2);
- geratrizes de tangência desses planos.

38. Representar o cilindro do exercício anterior. Determinar:
- traços dos planos δ e ω, tangentes ao sólidos, contendo a reta frontal f, que contém P(-6;4;3) e faz 70ºae;
- geratrizes de tangência desses planos.

39. Representar a esfera com 3 cm de raio e centro em O(2;4;3,5). Determinar:
- retas horizontal e frontal n e f, tangentes ao sólido em T(1;?;5,5), visível em projeção frontal;
- traços do plano ψ, que contém esse ponto;
- reta r, tangente em T, cuja projeção horizontal faz 60ºae.

40. Representar a esfera com 3cm de raio e centro em Q(-1;3;4). Determinar:
- traços do plano de rampa θ, perpendicular ao $\beta_{1/3}$ e tangente ao sólido no ponto T, visível em ambas as projeções;
- reta fronto horizontal h, tangente em T;
- reta s, tangente em T, cuja projeção horizontal faz 50ºad;
- projeções e traços da reta de perfil p, tangente ao sólido no ponto S(1,5;4;?), visível em ambas as projeções.