

Geometria Descritiva – Elementos Geométricos que Definem Planos

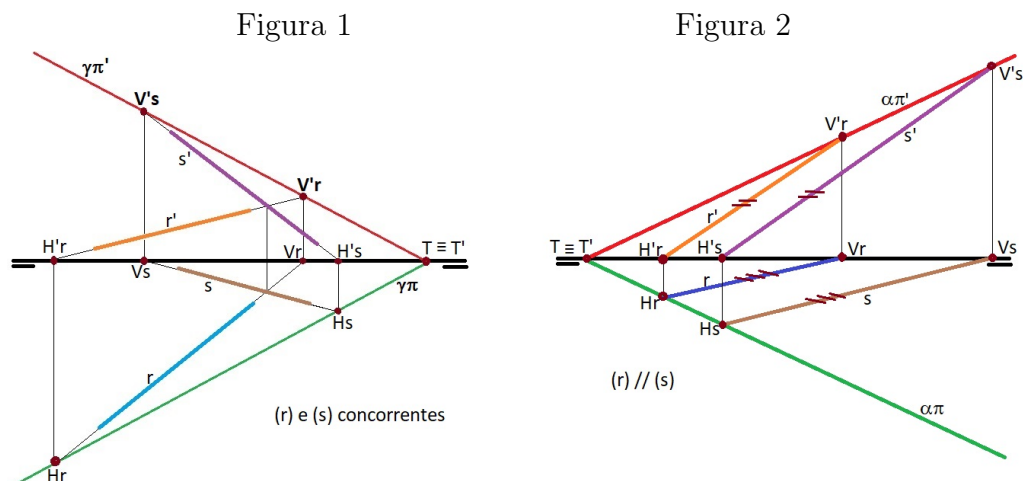
Para que um plano fique bem definido, é necessário:

- (a) duas retas concorrentes do plano;
- (b) duas retas paralelas do plano;
- (c) uma reta e um ponto exterior a ela, ambos pertencentes ao plano;
- (d) ou, três pontos não colineares pertencentes ao plano.

Como uma reta pode estar contida em infinitos planos, não é possível obter os traços desse plano conhecendo apenas uma reta do plano. Contudo, conhecendo-se pelo menos duas retas do plano, pode-se definir a direção dos traços do plano. Para tal, basta que sejam determinados os traços das duas retas. Os casos (c) e (d) podem ser reduzidos ao caso (a) ou no caso (b).

Para se determinar os traços de um plano, conhecendo-se duas retas concorrentes do plano, basta que sejam determinados os traços das duas retas. Unindo-se os traços verticais das duas retas, tem-se o traço vertical do plano. Unindo-se os traços horizontais das duas retas, tem-se o traço horizontal do plano (Fig. 1).

Para se determinar os traços de um plano conhecendo-se duas retas paralelas do plano, procede-se da mesma forma que para duas retas concorrentes. Determinam-se os traços das duas retas e unem-se os traços de mesmo nome, dando origem ao traço vertical e ao traço horizontal do plano (Fig. 2).



Quando são conhecidos uma reta e um ponto exterior a ela, ambos pertencentes ao plano, pode-se traçar uma reta auxiliar do plano a partir do ponto dado, concorrente ou paralela à reta conhecida, recaindo-se, respectivamente, no caso (a) ou no caso (b). Na Figura 3, tem-se uma reta (r) e um ponto (A) pertencentes a um plano (α). Para se determinar os traços do plano (α) que contém esses dois elementos, basta que seja traçada uma reta (A)(B) concorrente com a reta (r). Posteriormente, determina-se a posição dos traços das duas retas que, unidos, possibilitarão a determinação dos traços do plano (α).

No caso (d), quando são conhecidos três pontos não colineares do plano, deve-se traçar, pelos pontos, duas retas concorrentes ou duas retas paralelas. Optando-se por duas retas concorrentes, um dos pontos pode ser utilizado como ponto de concorrência e os outros dois como extremos dos

segmentos. Optando-se por duas retas paralelas, dois pontos podem ser utilizados para gerar um segmento de reta, passando-se pelo terceiro ponto uma reta paralela a esse segmento. Na Figura 4, o plano (β) definido pelos três pontos não colineares (C), (D) e (E) foi traçado com a utilização das retas paralelas (D)(E) e (s), sendo que (s) foi traçada pelo ponto (C). Determinando-se os traços das duas retas, obtêm-se os traços do plano definido pelos pontos (C), (D) e (E).

Figura 3

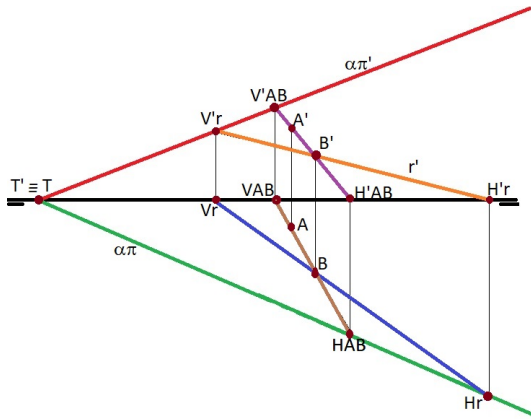
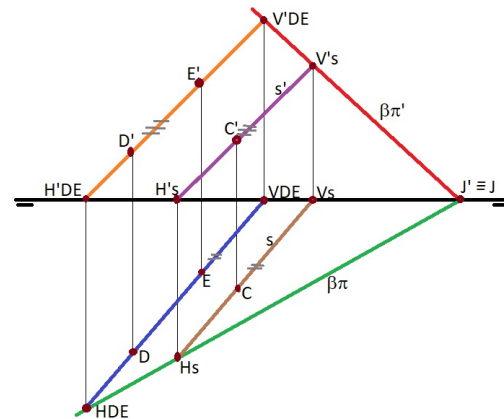


Figura 4



Retas contidas em planos não definidos por seus traços

É possível traçar retas de um plano sem conhecer os seus traços. Para tanto, basta que sejam conhecidos os elementos geométricos que definem o plano dado. Assim, conhecendo-se, por exemplo, duas retas concorrentes de um plano, pode-se traçar uma terceira reta desse plano. Para pertencer ao plano, é preciso que esta terceira reta seja concorrente com as duas retas conhecidas.

Na Figura 5, as retas concorrentes (r) e (s) definem um plano cujos traços não foram determinados. Mesmo assim, é possível afirmar que a reta Horizontal (A)(B) pertence a esse plano, uma vez que ela é concorrente com a reta (r) no ponto (A) e com a reta (s) no ponto (B).

Na Figura 6, a reta Frontal (C)(D) pertence ao plano definido pelas retas paralelas (t) e (u) por estar apoiada nas duas retas, isto é, por ser concorrente com a reta (t) no ponto (C) e com a reta (u) no ponto (D).

Figura 5

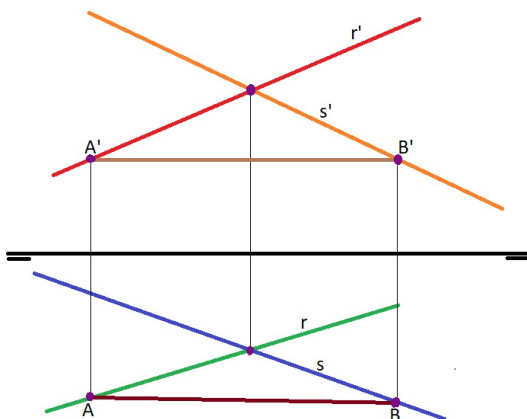
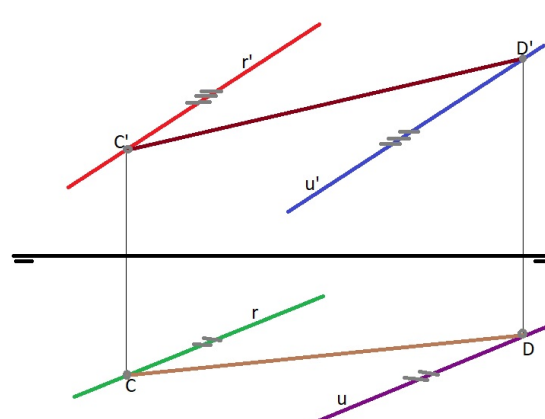
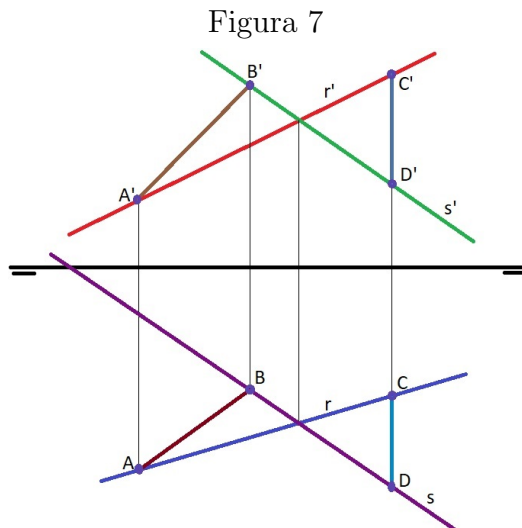


Figura 6



Na Figura 7, o plano definido pelas retas concorrentes (r) e (s) também contém as retas $(A)(B)$, reta Qualquer, e $(C)(D)$, de Perfil, porque estas são concorrentes com (r) e (s) .



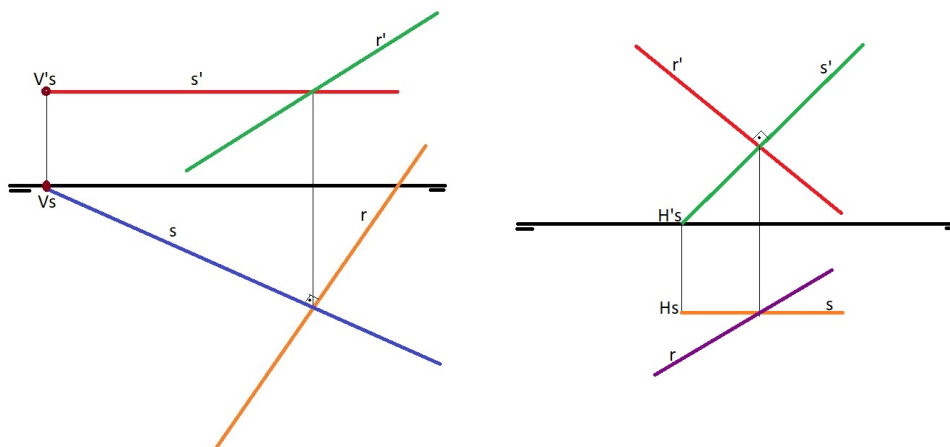
Planos definidos por suas retas de máximo declive ou de máxima inclinação

Quando só uma reta de máximo declive de um plano Qualquer é conhecida, é possível obter-se qualquer reta Horizontal pertencente ao plano sem que os traços desse plano sejam determinados. Isso é viável porque todas as retas horizontais de um plano Qualquer são paralelas ao traço horizontal do plano. Consequentemente, as retas horizontais desse plano terão projeção horizontal perpendicular à projeção horizontal de qualquer reta de máximo declive desse plano. Assim, para se traçar uma reta Horizontal (s) pertence ao plano Qualquer cuja reta de máximo declive é a reta Qualquer (r) , basta que a projeção horizontal de (s) seja perpendicular à projeção horizontal de (r) e que estas duas retas sejam concorrentes (Fig. 8).

Analogamente, todas as retas frontais de um plano Qualquer são paralelas ao traço vertical do plano. Consequentemente, as retas frontais desse plano terão projeção vertical perpendicular à projeção vertical de qualquer reta de máxima inclinação desse plano. Assim, para se traçar uma reta Frontal (s) pertence ao plano Qualquer cuja reta de máxima inclinação é a reta Qualquer (t) , basta que a projeção vertical de (s) seja perpendicular à projeção vertical de (t) e que estas duas retas sejam concorrentes (Fig. 9).

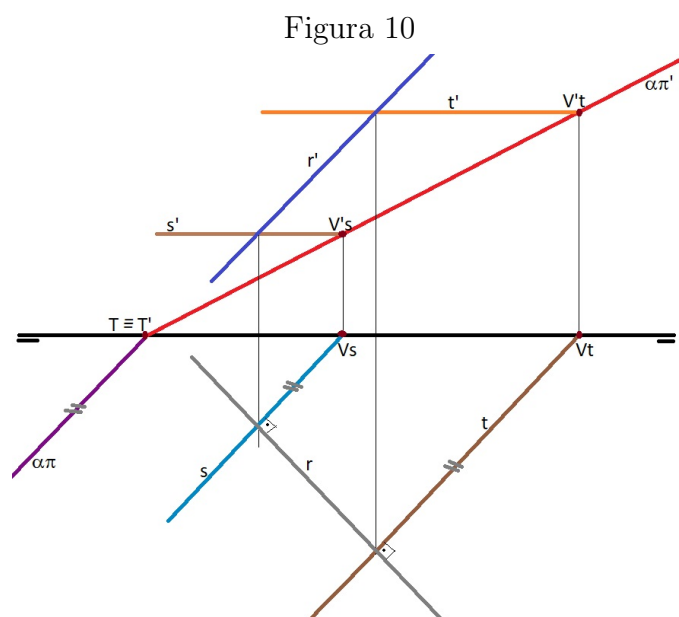
Figura 8

Figura 9



Quando se deseja determinar os traços de um plano Qualquer definido por uma reta de máximo declive ou de máxima inclinação sem que os traços dessa reta sejam determinados, podem ser utilizadas duas retas auxiliares. Se o plano for definido por uma reta de máximo declive, basta que sejam traçadas duas retas horizontais do plano (conforme procedimento apresentado na Figura 8) e que os seus traços verticais sejam determinados. Se o plano for definido por uma reta de máxima inclinação, obtêm-se duas retas frontais do plano (conforme procedimento apresentado na Figura 9) e determinam-se os seus traços horizontais.

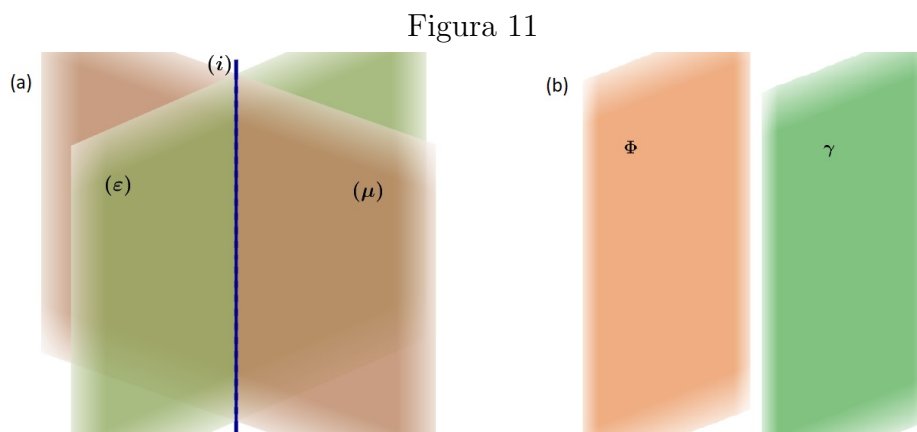
Na Figura 10, o plano Qualquer (α), do qual se conhecia a reta de máximo declive (r), foi determinado a partir do traçado das suas retas horizontais (s) e (t). Após a obtenção dos traços verticais das duas retas horizontais, determinou-se o traço vertical do plano. A partir do ponto de concurso dos traços, e sabendo-se que as projeções horizontais das retas (s) e (t) são paralelas ao traço horizontal do plano (α), foi possível determinar o traço horizontal do plano e completar a sua representação.



1. Intersecção de planos

Dois planos podem ser paralelos ou secantes. Enquanto dois planos paralelos não se interceptam, dois planos secantes se interceptam e sua intersecção sempre gera uma reta. Na Figura 11(a), os planos (μ) e (ε) são secantes e a sua intersecção é a reta (i) , enquanto os planos (γ) e (Φ) não se interceptam porque são paralelos (Fig. 11 (b)).

A reta formada pela intersecção de dois planos secantes nada mais é do que uma reta que pertence, simultaneamente, aos dois planos. Na verdade, a reta intersecção é a única reta comum a dois planos secantes. Conforme a regra de pertinência de reta e plano, uma reta pertence a um plano quando os seus traços estão sobre os traços de mesmo nome do plano. Assim, a reta formada pela intersecção de dois planos deve ter seus traços sobre os traços de mesmo nome dos dois planos secantes. Em outras palavras, os traços da reta intersecção encontram-se na intersecção dos traços de mesmo nome dos dois planos secantes.



Na Figura 12, o traço vertical da reta (i) , formada pela intersecção dos planos secantes (α) e (β) , está localizado na intersecção dos traços verticais dos dois planos, enquanto o traço horizontal da reta (i) está localizado na intersecção dos traços horizontais dos dois planos. A épura correspondente é apresentada na Figura 13, onde as projeções da reta (i) foram obtidas após a determinação das projeções dos seus traços.

Quando dois planos secantes não se interceptam no 1º diedro, normalmente é necessário prolongar os traços dos dois planos para obter-se a reta intersecção (Fig. 14). Em alguns casos, entretanto, os traços não se encontram mesmo que sejam prolongados, pois os dois planos secantes possuem traços horizontais ou verticais paralelos.

Quando os traços horizontais ou verticais dos dois planos secantes são paralelos, a reta intersecção possui apenas um traço. Se os traços horizontais são paralelos, a reta não possui traço horizontal. Se os traços verticais são paralelos, a reta não possui traço vertical. Assim, se dois planos secantes do tipo Qualquer têm traços horizontais paralelos, a reta intersecção não possui traço horizontal e é do tipo Horizontal (Fig. 15(a)). Se, por outro lado, dois planos secantes do tipo Qualquer têm traços verticais paralelos, a reta intersecção não possui traço vertical e é do tipo Frontal (Fig. 15(b)).

Figura 12

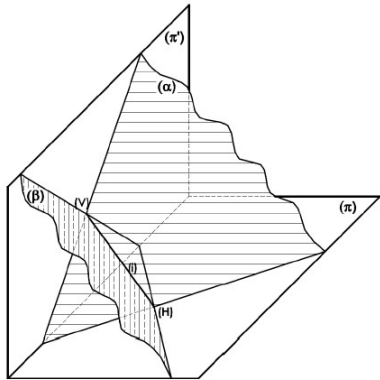


Figura 13

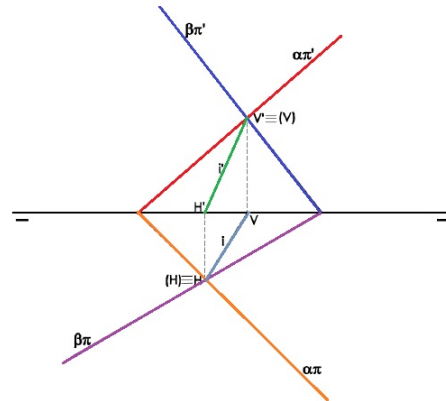


Figura 14

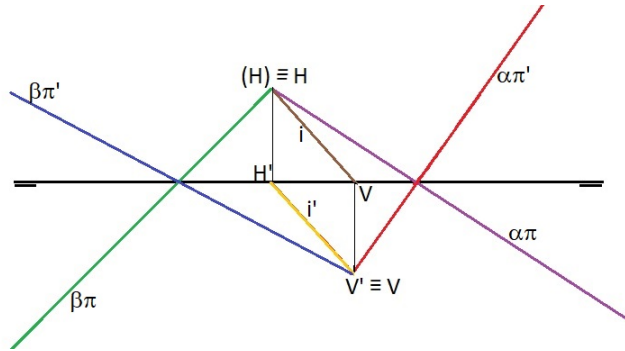
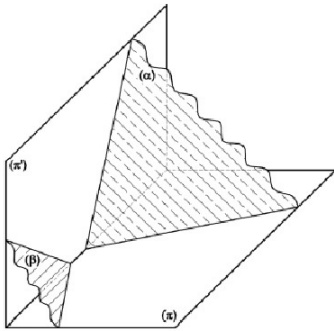
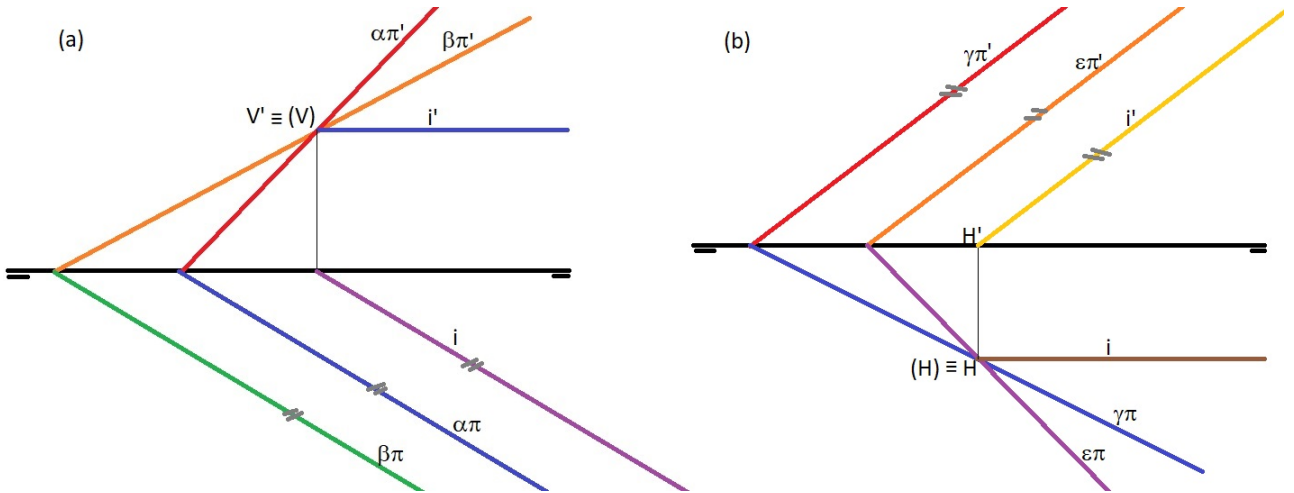


Figura 15



Quanto dois planos de Topo se interceptam, a reta originada não possui traço horizontal, pois o traço horizontal de um plano de Topo sempre é perpendicular à linha de terra e, portanto, os traços horizontais de dois planos de Topo secantes são sempre paralelos. A intersecção de dois planos de Topo é uma reta de Topo, que tem projeção horizontal paralela aos traços horizontais dos dois planos secantes (Fig. 16(a)).

Da mesma forma, quando dois planos Verticais se interceptam, a reta originada não possui traço vertical, pois os traços verticais de dois planos Verticais secantes são sempre paralelos. A intersecção de dois planos Verticais é uma reta Vertical, que tem projeção vertical paralela aos traços verticais dos dois planos secantes (Fig. 16(b)).

Em algumas situações, nem os traços verticais nem os traços horizontais de dois planos secantes se interceptam. É o caso de dois planos de Rampa secantes, de um plano de Rampa e um plano Que Passa pela Linha de Terra secantes ou de um plano Horizontal e um plano Frontal. Como, nesses casos, os traços dos planos secantes não se interceptam, a reta intersecção não terá nenhum traço. Assim, o único tipo de reta intersecção que pode ser formado é a reta Fronto-horizontal, que não possui traços sobre os planos de projeção.

Determinar a intersecção de um plano Horizontal e um plano Frontal é uma tarefa simples porque os dois planos são projetantes. Sabendo-se que a intersecção entre esses dois planos só pode ser uma reta Fronto-horizontal, basta que as projeções desta reta sejam posicionadas de modo a coincidirem com os traços de mesmo nome dos planos (Fig. 17).

Por outro lado, a determinação da intersecção de dois planos de Rampa ou de um plano de Rampa e um plano Que Passa pela Linha de Terra é mais trabalhosa, pois estes planos não são projetantes. Nesse caso, deve-se utilizar um plano auxiliar, determinando-se a intersecção deste com os dois planos secantes. O ponto onde as duas intersecções concorrem é um ponto comum aos três planos e, portanto, é um ponto pertencente à intersecção dos dois planos secantes dados. Como a intersecção, nesses casos, é uma reta Fronto-horizontal, o conhecimento de um ponto dessa reta já viabiliza a determinação das projeções da reta intersecção.

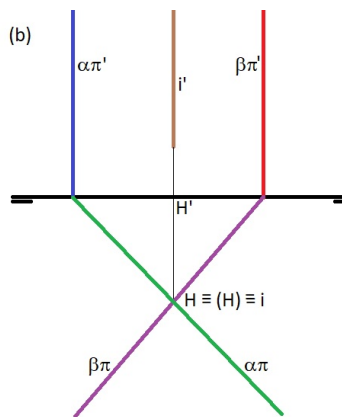
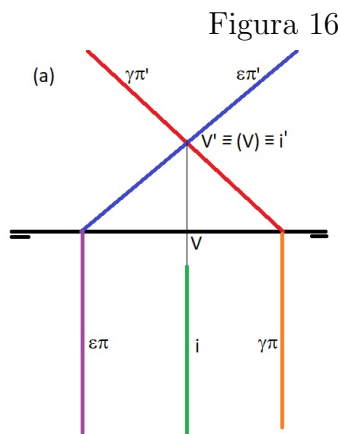
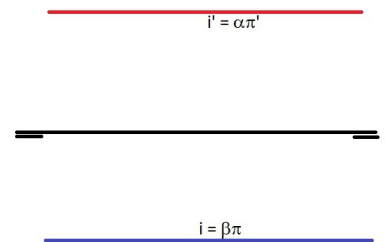
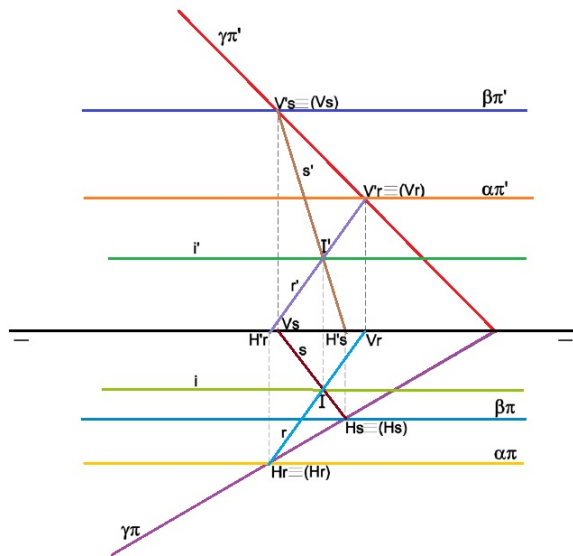


Figura 17



Na Figura 18, o plano auxiliar (γ) foi utilizado para a determinação da intersecção dos planos (α) e (β). Inicialmente, foram determinadas as retas (r) e (s), intersecções do plano auxiliar (γ) com os planos (α) e (β), respectivamente. Como essas duas retas são concorrentes no ponto (I), este ponto é comum aos planos (α) e (β), o que viabiliza o traçado das projeções da reta (i), intersecção dos planos (α) e (β). O plano auxiliar traçado é apenas um dos vários planos que poderiam ter sido utilizados para resolver o problema:

Figura 18

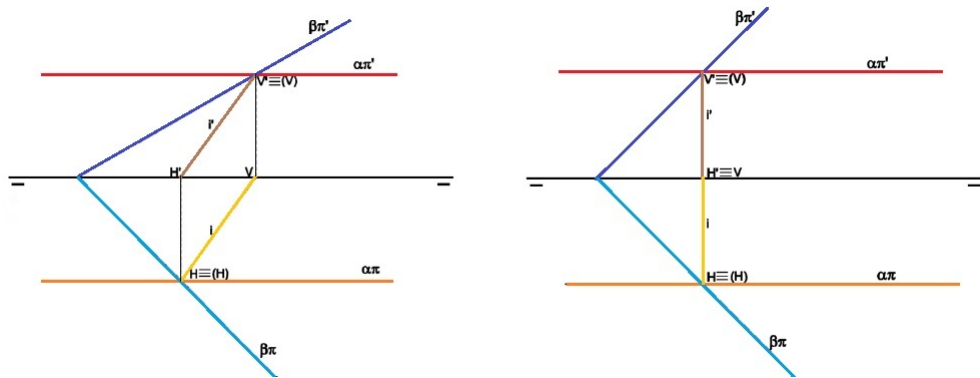


Para saber que tipo de reta será gerado pela intersecção de dois planos, deve-se, primeiramente, analisar os tipos de plano em questão. Por exemplo, a intersecção de um plano De Topo e um plano Vertical é uma reta Qualquer, uma vez que é o único tipo de reta comum aos dois planos (Quadro 1). Em alguns casos, o tipo de reta gerado pela intersecção de dois planos não pode ser determinado dessa forma, como, por exemplo, na intersecção de um plano Qualquer e um plano De Rampa. Nesse caso, a reta gerada pode ser Qualquer (Fig. 19(a)) ou de Perfil (Fig. 19(b)), dependendo da inclinação dos traços dos planos secantes, e a classificação da reta intersecção deverá ser feita após a sua determinação em épura.

Quadro 1 – Tipos de retas que podem estar contidas em cada tipo de plano

Tipo de plano	Tipos de retas que podem estar contidas no plano
Horizontal	Horizontal, de Topo e Fronto-horizontal
Frontal	Frontal, Vertical e Fronto-horizontal
De Topo	De Topo, Frontal e Qualquer
Vertical	Vertical, Horizontal e Qualquer
De Perfil	De Perfil, Vertical e de Topo
Qualquer	Qualquer, Horizontal, Frontal e de Perfil
Que Passa pela Linha de Terra	De Perfil, Fronto-horizontal e Qualquer
De Rampa	De Perfil, Fronto-horizontal e Qualquer

Figura 19



2. Intersecção de uma reta com um plano

A intersecção de uma reta com um plano sempre é um ponto. Esse ponto nada mais é do que o traço da reta sobre o plano ou, em outras palavras, o ponto onde a reta fura o plano. Para se determinar a intersecção de uma reta (r) com um plano (α), traça-se, primeiramente, um plano auxiliar β que contenha a reta. Posteriormente, determina-se a reta (s), intersecção dos dois planos. O ponto de concorrência (I) da reta intersecção da reta (s) com a reta (r) é o ponto onde esta fura o plano (Fig. 20(a)). Na Figura 20(b), a obtenção da intersecção da reta (r) com o plano (α) foi realizada com auxílio do plano Vertical β que contém (r). Determinou-se a reta (s), intersecção de α com β , e obteve-se o ponto (I) de concorrência entre as duas retas. Este é o ponto onde a reta (r) fura o plano α .

Figura 20

