

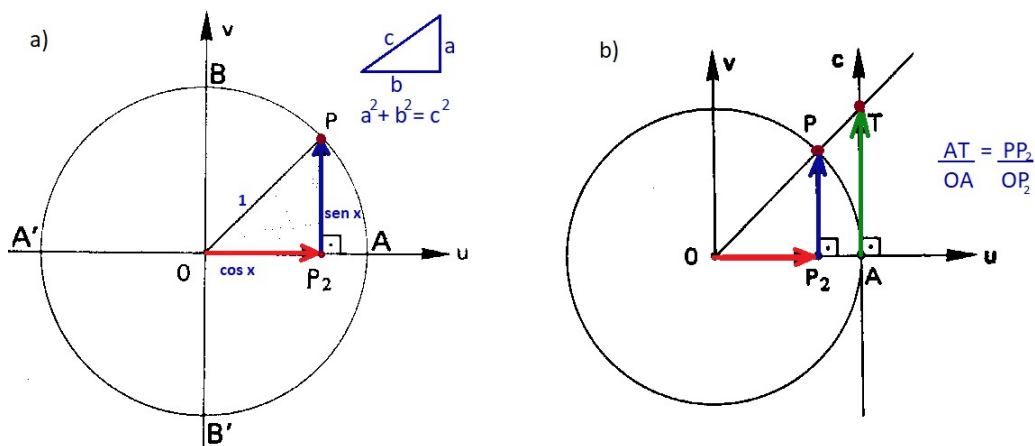
Relações Fundamentais no Ciclo Trigonométrico

Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que “o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos”. Assim,

Teorema 1. Para todo x vale a relação [Fig. 9 (a)]: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Teorema 2. Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação [Fig. 9 (b)]: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Figura 1

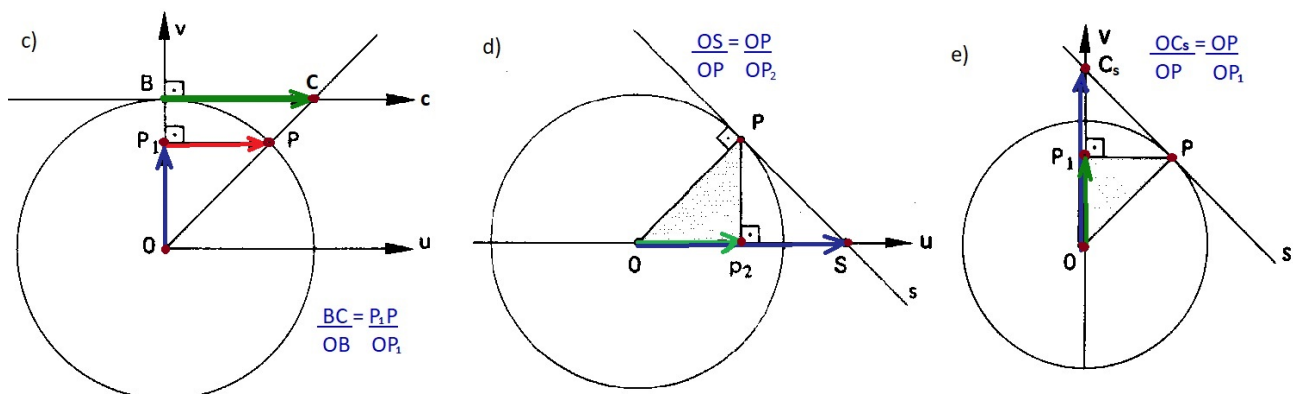


Teorema 3. Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação [Fig. 10 (c)]: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Teorema 4. Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação [Fig. 10 (d)]: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

Teorema 5. Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação [Fig. 10 (e)]: $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

Figura 2



Corolário 1. Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \sec^2 x = \tan^2 x + 1 \quad \csc^2 x = 1 + \cot^2 x \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

QUESTÃO 1: Sabendo que $\csc x = -\frac{25}{24}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x .

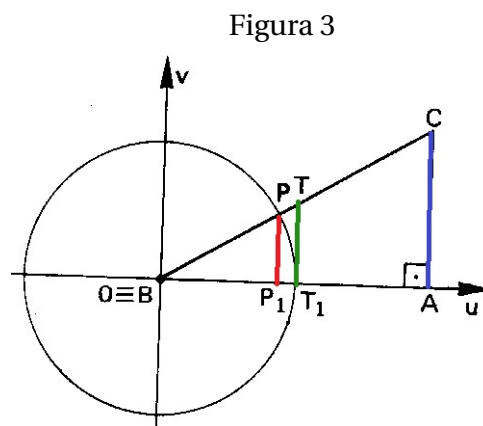
QUESTÃO 2: Sabendo que $\tan x = \frac{12}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x .

As propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulos de um triângulo retângulo ABC , considerando o ciclo trigonométrico de raio unitário e centro no vértice B , fixo num sistema cartesiano uOv (Fig. 11):

$$\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{P_1P}{BP} = \frac{CA}{BC} \Rightarrow \frac{\sin \hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{\cos \hat{B}}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

$$\Delta BTT_1 \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{T_1T}{OT_1} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{\tan \hat{B}}{1} = \frac{b}{c} \Rightarrow \tan \hat{B} = \frac{b}{c}$$



Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ e $\hat{A} = 90^\circ$, decorre que $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ (\hat{B} e \hat{C} são complementares). Logo:

$$\sin \hat{C} = \cos \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \hat{C} = \sin \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{1}{\tan \hat{B}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}$$

QUESTÃO 3: Para medir a altura da torre vertical DE toma-se, no plano horizontal que passa pela sua base D , o segmento AB de comprimento $12m$ e cujo ponto médio é C . Medem-se os ângulos $D\hat{A}E$, $D\hat{B}E$ e $D\hat{C}E$ verificando-se que $D\hat{A}E = D\hat{B}E = 45^\circ$ e $D\hat{C}E = 60^\circ$. Determine a altura da torre.

QUESTÃO 4: Um observador colocado a $25m$ de um prédio, vê o edifício sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais $50m$, nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?

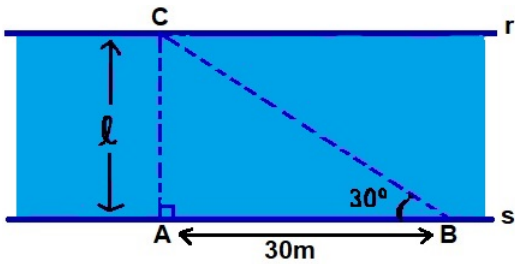
QUESTÃO 5: Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 20° . Determine a altura atingida pelo avião, após este percorrer $3.000m$ em linha reta.

QUESTÃO 6: Na figura 4, as retas r e s representam as margens de um rio.

a) Determine a largura ℓ do rio.

b) Se um barco tiver que se deslocar do ponto C ao ponto B , quantos metros percorreria neste trajeto?

Figura 4



Redução ao 1º Quadrante

É a dedução de fórmulas que são usadas para calcular as funções trigonométricas de x , com $x \notin [0, \pi/2]$, relacionando x com algum elemento do 1º quadrante.

Redução do 2º ao 1º Quadrante

Dado um número real x , tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja Q o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos senos (Fig. 13). Assim,

$$\widehat{AQ} + \widehat{AP} = \pi \Rightarrow \widehat{AP} = \pi - x.$$

Desta forma, temos que

$$\sin x = \sin(\pi - x) \quad \text{e} \quad \cos x = -\cos(\pi - x).$$

Considerando as relações fundamentais, temos:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(\pi - x)}{-\cos(\pi - x)} = -\tan(\pi - x) \quad \cot x = -\cot(\pi - x)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\cos(\pi - x)} = -\sec(\pi - x) \quad \csc x = \csc(\pi - x)$$

QUESTÃO 7: Calcule as funções trigonométricas de x , reduzindo este ao 1º quadrante.

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $\sin 128^\circ$ | b) $\cos 175^\circ$ | c) $\tan 103^\circ$ |
| d) $\cot 134^\circ$ | e) $\sec 152^\circ$ | f) $\csc 119^\circ$ |

Redução do 3º ao 1º Quadrante

Dado o número real x , tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja Q o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao centro do ciclo (Fig. 14). Assim, tomando o sentido anti-horário

$$\widehat{AQ} - \widehat{AP} = \pi \Rightarrow \widehat{AP} = x - \pi.$$

De imediato, temos que

$$\sin x = -\sin(x - \pi) \quad \text{e} \quad \cos x = -\cos(x - \pi).$$

Figura 5

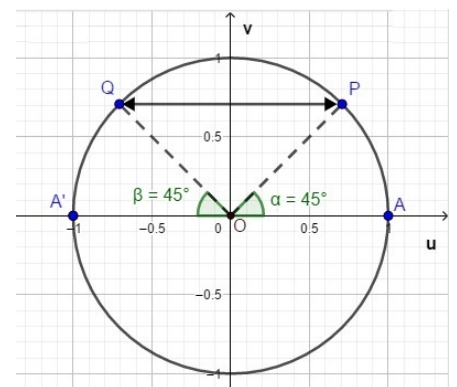
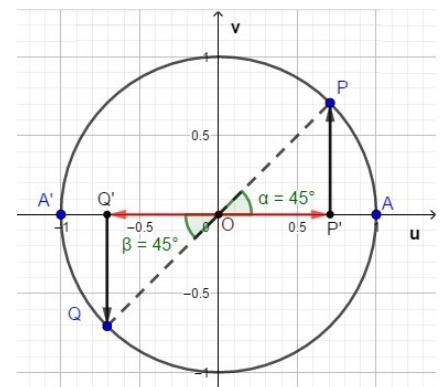


Figura 6



Considerando as relações fundamentais, temos:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sin(x - \pi)}{-\cos(x - \pi)} = \tan(x - \pi) \quad \cot x = \cot(x - \pi)$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\cos(x - \pi)} = -\sec(x - \pi) \quad \csc x = -\csc(x - \pi)$$

QUESTÃO 8: Calcule as funções trigonométricas de x , reduzindo este ao 1º quadrante.

a) $\sin 208^\circ$

b) $\cos 195^\circ$

c) $\tan 225^\circ$

d) $\cot 264^\circ$

e) $\sec 257^\circ$

f) $\csc 200^\circ$

Redução do 4º ao 1º Quadrante

Dado o número real x , tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao centro do ciclo (Fig. 15). Assim, tomando o sentido anti-horário

$$\widehat{AQ} + \widehat{AP} = 2\pi \Rightarrow \widehat{AP} = 2\pi - x.$$

De imediato, temos que

$$\sin x = -\sin(2\pi - x) \quad \text{e} \quad \cos x = \cos(2\pi - x).$$

Considerando as relações fundamentais, temos:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sin(2\pi - x)}{\cos(2\pi - x)} = -\tan(2\pi - x) \quad \cot x = -\cot(2\pi - x)$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(2\pi - x)} = \sec(2\pi - x) \quad \csc x = -\csc(2\pi - x)$$

QUESTÃO 9: Calcule as funções trigonométricas de x , reduzindo este ao 1º quadrante.

a) $\sin 318^\circ$

b) $\cos 355^\circ$

c) $\tan 325^\circ$

d) $\cot 284^\circ$

e) $\sec 275^\circ$

f) $\csc 290^\circ$

Figura 7

