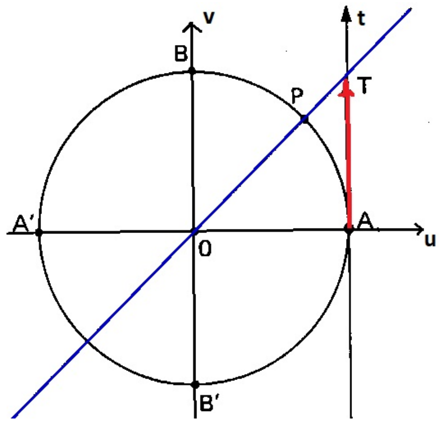
Funções Periódicas: Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

Função Tangente

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo t das tangentes. Denominamos ***tangente de*** x [indicado por $\tan x$] a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ (Fig. 1).

Figura 1



A *função tangente* é a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o número real $\overline{AT} = \tan x$, isto é,

$$f(x) = \tan x.$$

Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, o ponto P está em B ou B' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo t. Logo, não existe o ponto T, então a $\tan x$ não é definida.

Propriedades:

1º. Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\tan x$ é positiva.

2º. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\tan x$ é negativa.

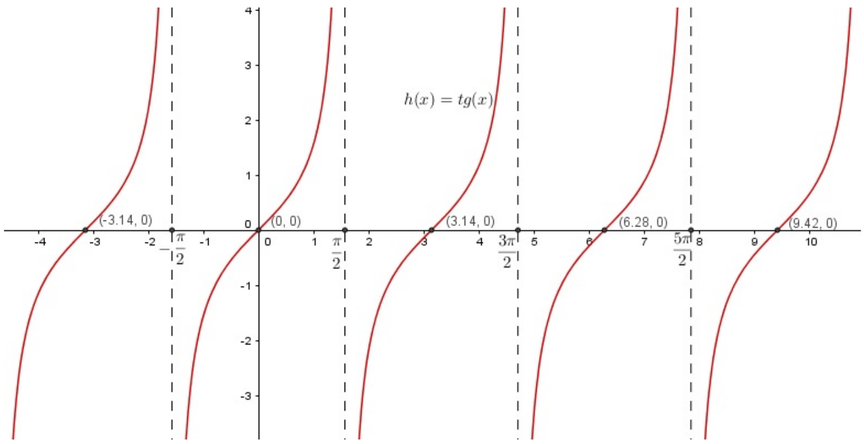
3º. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\tan x$ é crescente.

Quando usamos a função $f(x) = \tan(x)$, deve ser entendido que a função tangente relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \text{ com } \cos(x) \neq 0$$

Esta função não está definida quando $\cos(x) = 0$, isto é, quando $x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \pm\frac{7\pi}{2},\ \cdots$. Então, o domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ para todo k inteiro e sua variação é $(-\infty, \infty)$.

Figura 2



Os zeros da função tangente ocorrem nos múltiplos de π e seu período é π (Fig. 2). Logo,

$$tg(x + \pi) = tg(x), \text{ para todo } x.$$

QUESTÃO 1: Localize os arcos $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Em seguida, dê o sinal da tangente de cada um deles.

QUESTÃO 2: Sabendo que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ e $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ e verificando que $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ são simétricos em relação ao eixo u, assim como $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, dê o valor de $\tan\frac{7\pi}{4}$ e $\tan\frac{5\pi}{4}$.

QUESTÃO 3: Determinar o período, o domínio, a imagem e construir o gráfico de um período completo das funções:

a) Dada por $f(x) = -\tan(x)$

b) Dada por $f(x) = \tan(2x)$

c) Dada por $f(x) = |\tan(x)|$

d) Dada por $f(x) = |3\tan(x)|$

e) Dada por $f(x) = 2\tan(x)$

f) Dada por $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

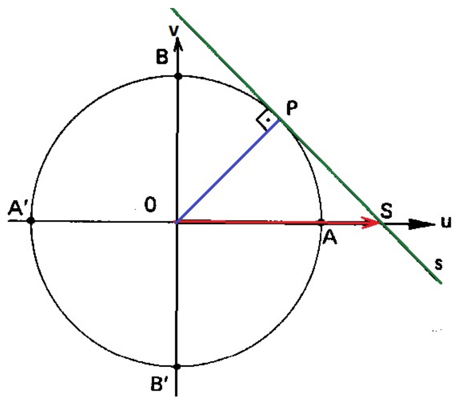
Função Secante

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com eixo dos cossenos. Denominamos ***secante de*** x [indicado por $\sec x$] a abscissa $\overline{OS}$ do ponto S (Fig. 3).

A *função secante* é a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o número real $\overline{OS} = \sec x$, isto é,

$$f(x) = \sec x.$$

Figura 3



Propriedades:

1º. Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\sec x$ é positiva.

2º. Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $\sec x$ é negativa.

3º. Se x percorre o primeiro ou o segundo dos quadrante, então $\sec x$ é crescente.

4º. Se x percorre o terceiro ou o quarto dos quadrante, então $\sec x$ é decrescente.

Para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe S, a $f(x) = \sec x$ não é definida.

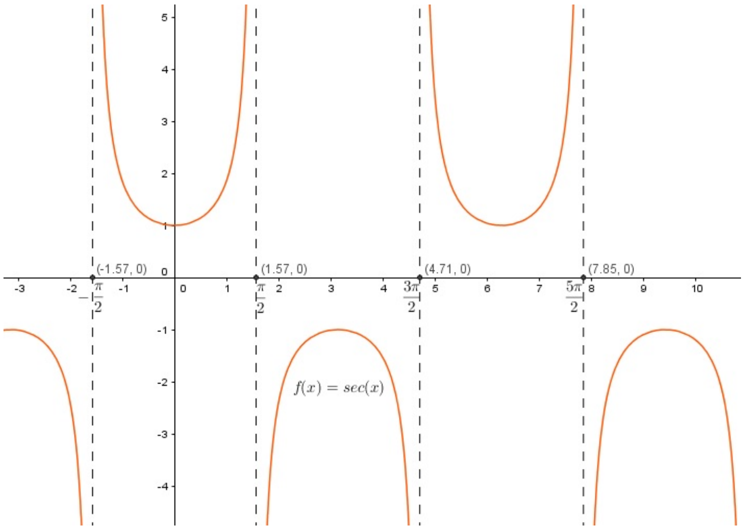
$$f(x) = \frac{1}{cos(x)}, \text{ com } cos(x) \neq 0$$

Esta função não está definida quando $cos(x) = 0$, isto é, quando $x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \pm\frac{7\pi}{2},\ \cdots$.

O domínio é $\{x \in \mathbb{R} \ |\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ para todo k inteiro e sua variação é $\mathbb{R} -]-1, 1[$. É periódica e seu período é 2π (Fig. 4), logo

$$sec(x + 2\pi) = sec(x), \text{ para todo } x.$$

Figura 4



QUESTÃO 4: Localize os arcos $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$. Em seguida, dê o sinal da secante de cada um deles.

QUESTÃO 5: Sabendo que $\sec\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, localizando os arcos e utilizando simetria, dê o valor da secante de $\sec\frac{5\pi}{6}, \sec\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

QUESTÃO 6: Determinar o período, o domínio, a imagem e construir o gráfico de um período completo das funções:

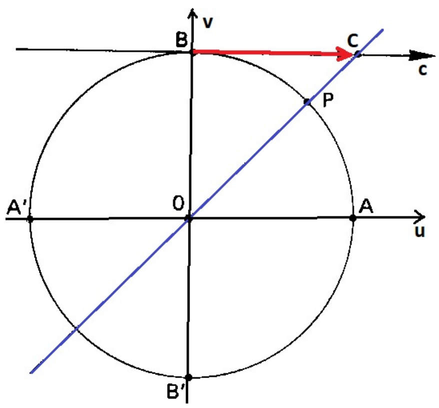
a) Dada por $f(x) = -\sec(x)$ b) Dada por $f(x) = \sec(3x)$ c) Dada por $f(x) = |\sec(x)|$

d) Dada por $f(x) = -3\sec(x)$ e) Dada por $f(x) = \sec\left(\frac{x}{2}\right)$

Função Cotangente

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja C sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos ***cotangente de*** x [indicado por $\cot(x)$] a medida algébrica do segmento $\overline{BC}$ (Fig. 5).

Figura 5



Denominamos *função cotangente* a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o número real $\overline{BC} = \cot x$, isto é, $f(x) = \cot x$.

$$\cot(x) = \frac{cos(x)}{\sin(x)}, \text{ com } \sin(x) \neq 0$$

Propriedades:

1º. Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\cot x$ é positiva.

2º. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\cot x$ é negativa.

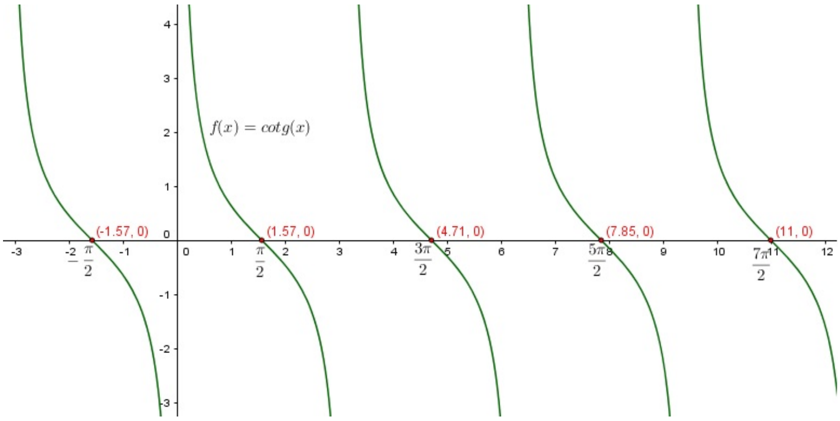
3º. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\cot x$ é decrescente.

Se $x = k\pi$, o ponto P está em A ou A' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo c. Logo, não existe o ponto C, então a $\cot x$ não é definida.

Os zeros da função cotangente ocorrem nos múltiplos de $\dfrac{\pi}{2}$, o domínio desta função é $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi\}$ para todo k inteiro e sua variação é $(-\infty, \infty)$. A função cotangente é periódica e seu período é π (Fig. 6).

$$\cot(x+\pi) = \cot(x), \text{ para todo } x.$$

Figura 6



Questão 7: Localize os arcos $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$. Em seguida, dê o sinal da cotangente de cada um deles.

Questão 8: Sabendo que $\cot\dfrac{\pi}{4} = 1$ e $\cot\dfrac{3\pi}{4} = -1$ e verificando que $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{7\pi}{4}$ são simétricos em relação ao eixo u, assim como $\dfrac{3\pi}{4}$ e $\dfrac{5\pi}{4}$, dê o valor da $\cot\dfrac{7\pi}{4}$ e $\cot\dfrac{5\pi}{4}$.

Questão 9: Determinar o período, o domínio, a imagem e construir o gráfico de um período completo das funções:

a) Dada por $f(x) = -\cot(x)$

b) Dada por $f(x) = \cot(3x)$

c) Dada por $f(x) = |\cot(x)|$

d) Dada por $f(x) = -2\cot(x)$

e) Dada por $f(x) = \cot\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Função Cossecante

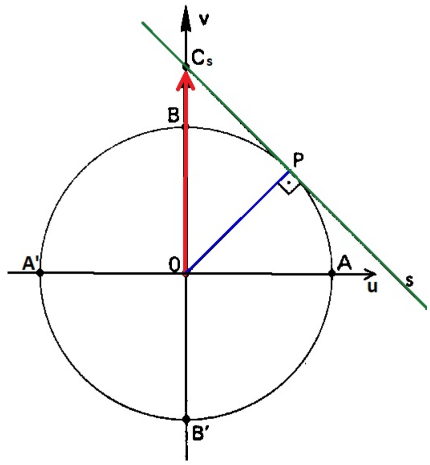
Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C_s sua intersecção com eixo dos senos. Denominamos ***cossecante de*** x [indicado por $\csc x$] a ordenada $\overline{OC_s}$ do ponto C_s (Fig. 7).

A *função cossecante* é a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o número real $\overline{OC_s} = \csc x$, isto é,

$$f(x) = \csc x.$$

Para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C_s, a $f(x) = \csc x$ não é definida.

Figura 7



Propriedades:

1º. Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $\csc x$ é positiva.

2º. Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $\csc x$ é negativa.

3º. Se x percorre o segundo ou o terceiro dos quadrante, então $\csc x$ é crescente.

4º. Se x percorre o primeiro ou o quarto dos quadrante, então $\csc x$ é decrescente.

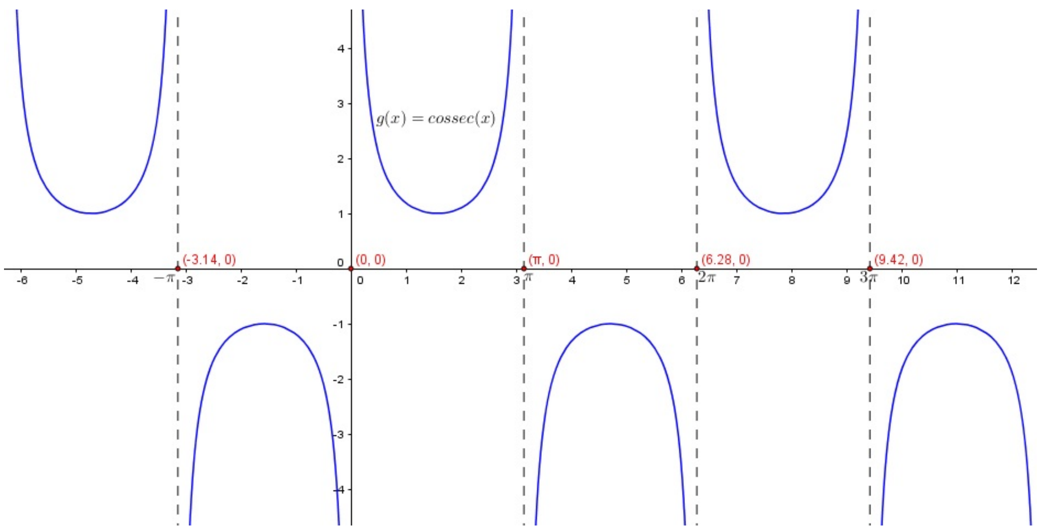
A função cossecante, $f(x) = \csc(x)$, relaciona-se com a função seno pela equação

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \text{ com } \sin(x) \neq 0$$

O domínio é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi\}$ para todo k inteiro e sua variação é $\mathbb{R} -]-1, 1[$. É periódica e seu período é 2π (Fig. 8).

$$\csc(x + 2\pi) = \csc(x), \text{ para todo } x.$$

Figura 8



As funções cossecante, secante e cotangente são chamadas de funções remanescentes, por serem recíprocos das funções seno, cosseno e tangente.

Questão 10: Localize os arcos $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{6}$. Em seguida, dê o sinal da cossecante de cada um deles.

Questão 11: Sabendo que $\csc\frac{\pi}{6} = 2$, localizando os arcos e utilizando simetria, dê o valor da cossecante de $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

Questão 12: Determinar o período, o domínio, a imagem e construir o gráfico de um período completo das funções:

a) Dada por $f(x) = -\csc(x)$

b) Dada por $f(x) = \csc(3x)$

c) Dada por $f(x) = |\csc(x)|$

d) Dada por $f(x) = -3\csc(x)$

e) Dada por $f(x) = \csc\left(\frac{x}{2}\right)$