Funções Trigonométricas

Ciclo Trigonométrico

Tomando um sistema cartesiano ortogonal uOv sobre um plano e considerando circunferência $\lambda(O,1)$, esta tem comprimento 2π. Desta forma, podemos associar a cada número real x, o comprimento $0 \leq x < 2\pi$ (ou $0^o \leq x < 360^o$) um único ponto P da circunferência λ (Fig. 1).

Figura 1

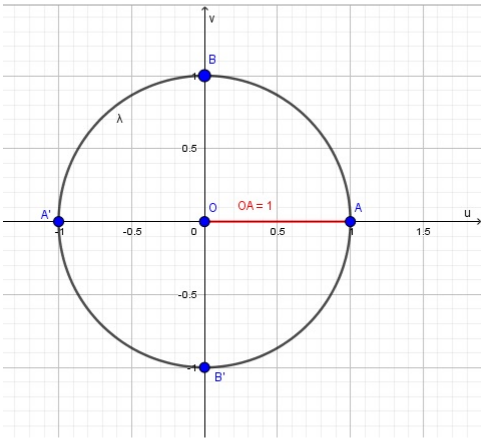
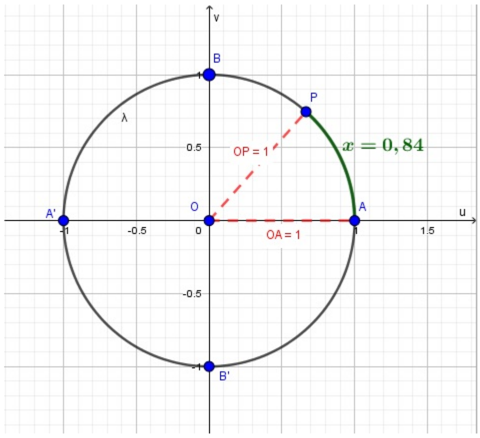


Figura 2



Se os pontos P e A coincidirem ($P = A$), então $x = 0$ rad. Se os pontos P e A nÃ£o coincidirem ($P \neq A$), então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x ($x > 0$ rad), no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso (Fig. 2).

A circunferência orientada λ, com origem em A, é chamada *ciclo* ou *circunferência trigonométrica*.

Se o ponto P está associado ao número x dizemos que P é a imagem de x no ciclo (Fig. 3). Por exemplo,

Figura 3

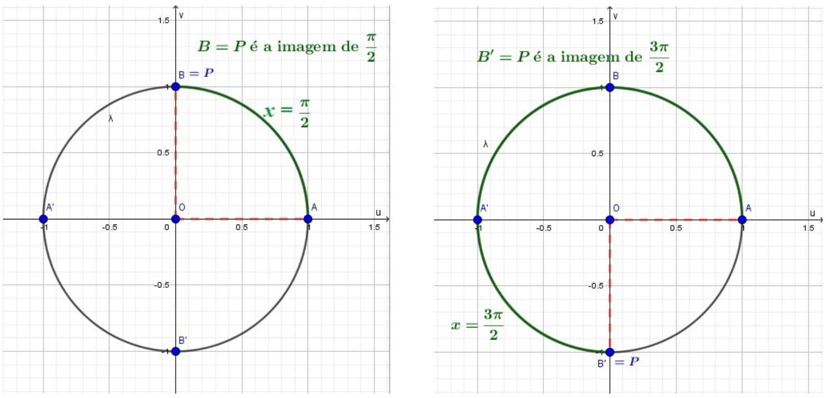
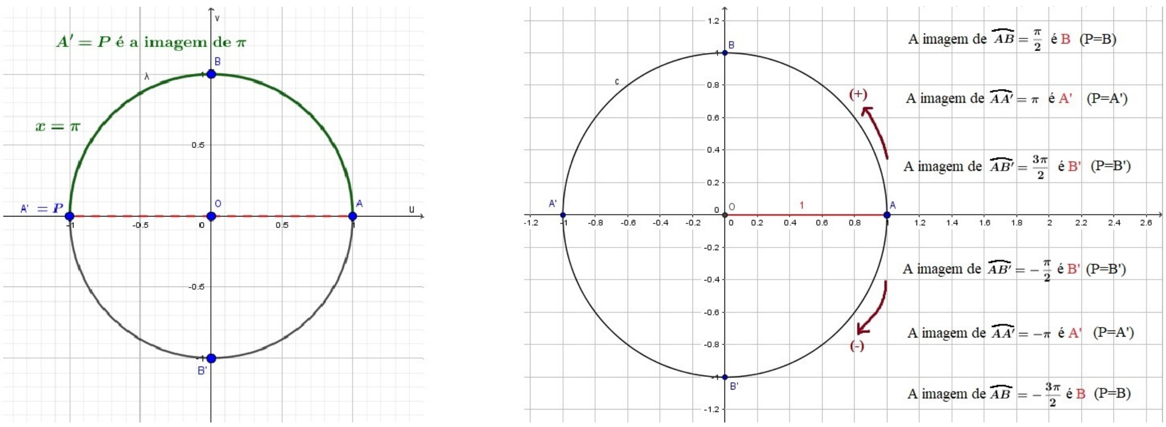
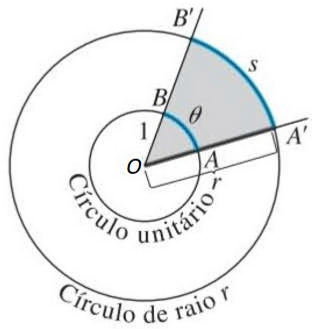


Figura 4



Numa circunferência $C(O,r)$ tomemos dois pontos A, B e consideremos o ângulo $A\hat{O}B$, que é o **ângulo central**.

A medida em radianos do ângulo central $A'OB'$ é o número $\theta = \dfrac{s}{r}$.
Para um círculo unitário de raio $r = 1$, θ corresponde ao comprimento do arco AB que o ângulo central $A\hat{O}B$ corta do círculo unitário.



Como já sabemos, os ângulos são medidos em graus ou radianos. O número de radianos no ângulo central $A'\hat{O}B'$ dentro de um círculo de raio r é definido como o número de “unidades de raio ”contidas no arco s subentendidas por esse ângulo central. Se denotamos esse ângulo central por θ quando medido em radianos, significando que $\theta = \dfrac{s}{r}$, ou

$$s = r\cdot\theta \ \ (\theta \ \ em \ \ radianos) \tag{1}$$

Se **o círculo** é um *círculo unitário* com raio $r = 1$, então, a partir da Figura acima e Equação (1), vemos que o ângulo central θ medido em radianos equivale apenas ao comprimento do arco que o ângulo corta do círculo unitário.
Uma vez que uma volta inteira do círculo unitário equivale a 360°ou 2π radianos, temos

$$\pi \ \ radianos = 180^o \tag{2}$$

$$\text{e 1 radiano} = \frac{180^o}{\pi} \ \ (\approx 57{,}3 \ \text{ graus}) \ \text{ ou } \ 1 \ \text{grau} = \frac{\pi}{180^o} \ \ (\approx 0{,}017) \ \text{ radianos.}$$

Arcos Côngruos

Dois arcos são côngruos quando possuem a mesma extremidade. Em geral, trabalhamos com arcos da primeira volta, do sentido positivo. Caso isso não ocorra, temos que determinar o seu côngruo da volta positiva. Por exemplo, o ângulo de 480^o, em que dividimos este por 360^o, resultando “1 volta”. Assim,

$$480^o = 1 * 360^o + 120^o.$$

O ângulo de 120^o é a medida do arco de mesma extremidade. Para ângulos negativos, esse procedimento nos faz obter arco côngruo da primeira volta negativa, assim, adicionamos 360^o para obter a volta positiva. Por exemplo:

$$-157^o + 360^o = 203^o$$

Assim, $-157^o = 203^o - 1 * 360^o$. Veja que $-1237^o = 203^o - 3\cdot 360^o - 360^o = 203^o - 4\cdot 360^o$.

Considerando θ a medida de uma arco, a expressão geral das medidas dos arcos côngruos a ele é dada por:

$$\alpha + k\cdot 360^o \ \ \text{(em graus) ou } \ \alpha + k\cdot 2\pi \ \ \text{(em radianos)}$$

o qual α é a medida do arco côngruo da 1ª volta positiva e $k \in \mathbb{Z}$.

Questão 1: Determinar em qual quadrante situam-se as extremidades dos seguintes arcos:

a) 72°

b) −300°

c) $\dfrac{3\pi}{4}$

d) $\dfrac{11\pi}{3}$

e) 1280°

f) −400°

A Tabela abaixo apresenta a equivalência entre a s medidas de grau e radiano para alguns ângulos básicos.

Grau	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Grau	210^o	225^o	240^o	270^o	300^o	315^o	330^o	360^o
θ rad	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Razões Trigonométricas na Circunferência

Considerando um ciclo trigonométrico de origem em A e raio $\overline{OA} = 1$.

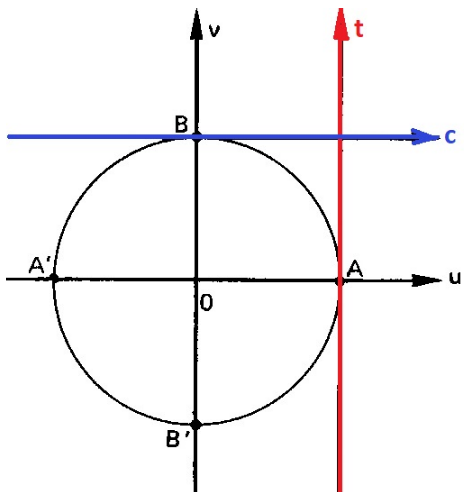
Para o estudo das razões trigonométricas na circunferência, associamos ao ciclo quatro eixos:

1º) Eixo dos cossenos (u).
Direção: $\overline{OA}$.
Sentido positivo: $O \to A$.

2º) Eixo dos senos (v).
Direção: $\perp u$, por O.
Sentido positivo: $O \to B$, sendo B tal que $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$.

3º) Eixo das tangentes (t).
Direção: $\parallel v$, por A.
Sentido positivo: o mesmo de v.

4º) Eixo das cotangentes (c).
Direção: $\parallel u$, por B.
Sentido positivo: o mesmo de u.

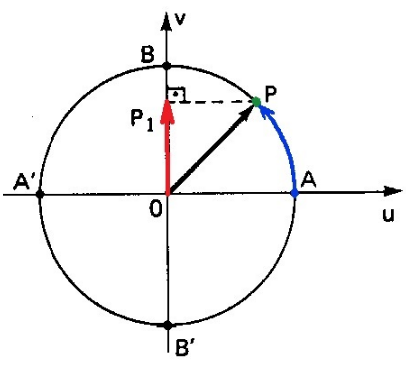


Função Seno: quando usamos a função $f(x) = \sin(x)$, deve ser entendido que $\sin(x)$ significa o seno de um ângulo cuja medida é x, com $x \in [0, 2\pi]$.

O domínio é $(-\infty, \infty)$ e a variação é $[-1, 1]$, assim, para todos os valores de x temos

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ ou } |\sin(x)| \leq 1.$$

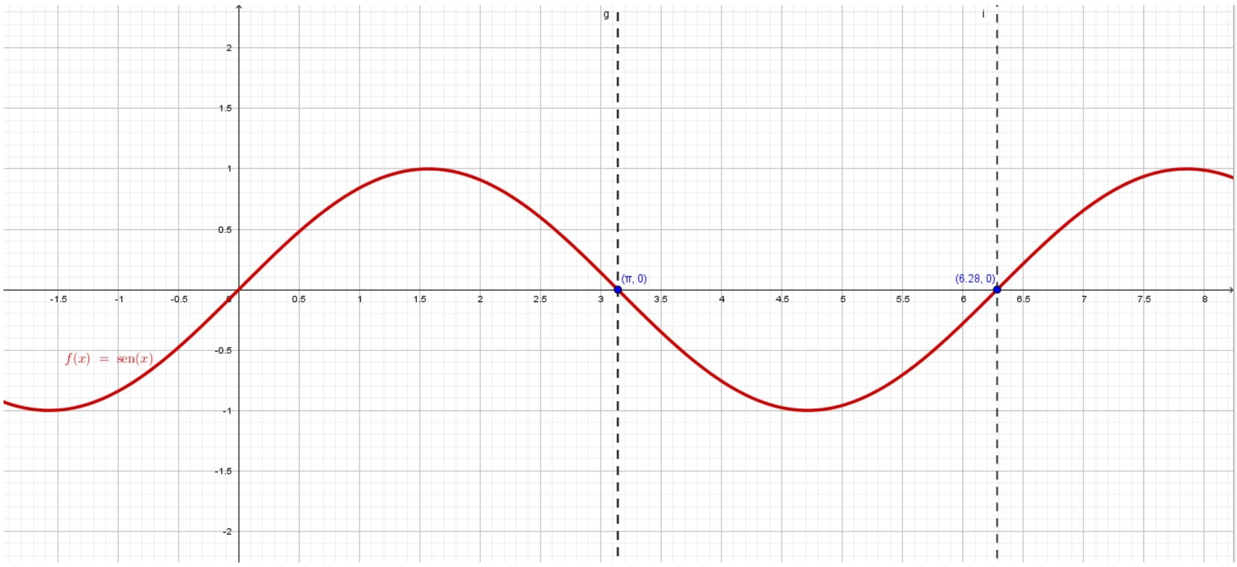
Assim, denominamos $\sin(x)$ a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv.



Para cada número real $x \in [0, 2\pi]$ existe uma única medida P e cada imagem P tem um único valor para $\sin(x)$ ($\overline{OP_1} = \sin(x)$).

Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $\sin(x)$ é positivo. Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $\sin(x)$ é negativo. Assim, em relação a imagem de x, o valor mínimo é -1 e o valor máximo é 1 de $\sin(x)$.

Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $\sin(x)$ é crescente. Enquanto que, se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $\sin(x)$ é decrescente.



Os zeros da função seno ocorrem nos múltiplos de π:

$$\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

A função seno é periódica e tem período 2π. Assim, para todos os valores de x

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

QUESTÃO 2: Localizar os arcos $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ e dê o sinal do seno de cada um deles.

QUESTÃO 3: Determinar o período, o domínio, a imagem e construir o gráfico de um período completo das funções:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\sin(x)$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3\sin(x)$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\sin(x)|$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |5\sin(x)|$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(2x)$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

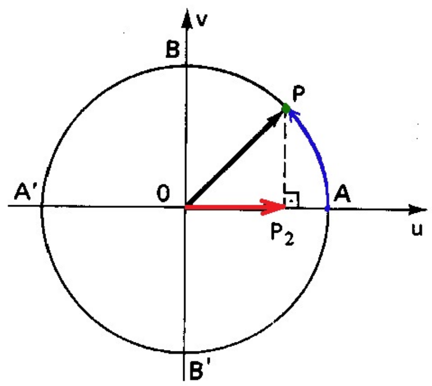
QUESTÃO 4: Para que valores de m existe x tal que $\sin(x) = 2m - 7$?

Função Cosseno: quando usamos a função $g(x) = \cos(x)$, deve ser entendido que $\cos(x)$ significa o cosseno de um ângulo cuja medida é x, com $x \in [0, 2\pi]$.

O domínio é $(-\infty, \infty)$ e a variação é $[-1, 1]$, assim, para todos os valores de x temos

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ ou } |\cos(x)| \leq 1.$$

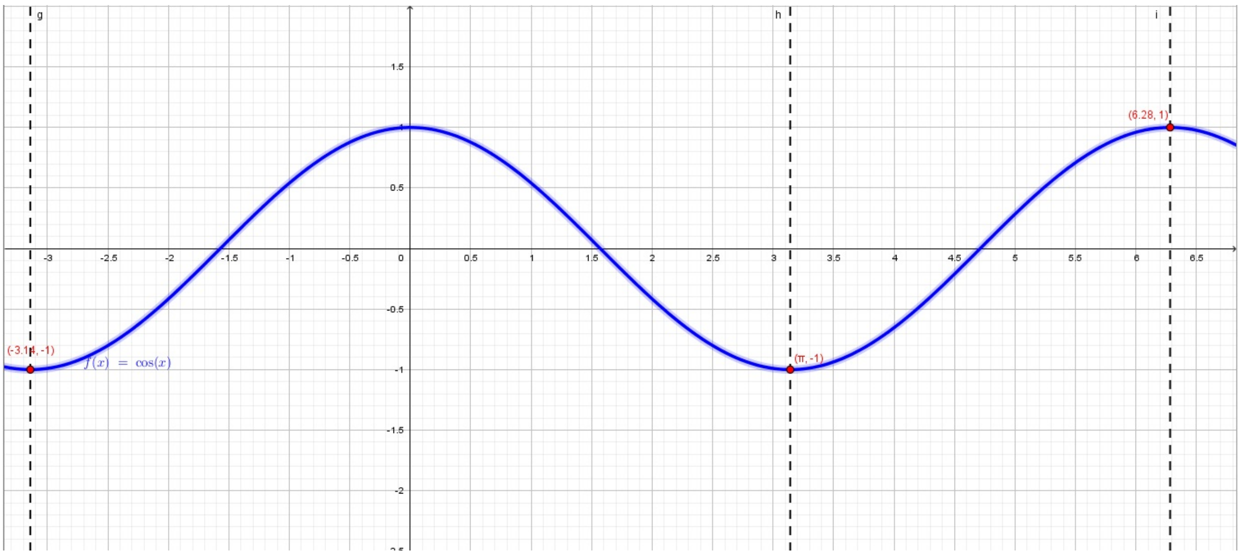
Logo, denominamos $\cos(x)$ a ordenada $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv.



Para cada número real $x \in [0, 2\pi]$ existe uma única medida P e cada imagem P tem um único valor para $\cos(x)$ ($\overline{OP_2} = \cos(x)$).

Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\cos(x)$ é positivo. Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $\cos(x)$ é negativo. Assim, em relação a imagem de x, o valor mínimo é -1 e o valor máximo é 1 de $\cos(x)$.

Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos(x)$ é decrescente. Enquanto que, se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos(x)$ é crescente.



Os zeros da função cosseno ocorrem nos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = n\frac{\pi}{2}, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}^* \ \text{ e } \ n \ \text{ ímpar.}$$

A função cosseno é periódica e tem período 2π. Assim, para todos os valores de x

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

No ciclo trigonométrico, os números x e $-x$ têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, o que resulta

$$\sin(-x) = -\sin(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \cos(-x) = \cos(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

assim, *a função seno é uma função impar* e *a função cosseno, é função par.*

QUESTÃO 5: Localizar os arcos $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ e dê o sinal do cosseno de cada um deles.

QUESTÃO 6: Determinar o período, o domínio, a imagem e construir o gráfico de um período completo das funções:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\cos(x)$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\cos(x)$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |-\cos(x)|$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |3\cos(x)|$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(-3x)$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos\left(-\frac{x}{3}\right)$

QUESTÃO 7: Para que valores de n existe x tal que $\cos(x) = \frac{n+2}{2n-1}$?