Arcos e Ângulos

Definição 1. Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência (Fig. 1 e 2), esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem A e B, é denominada *arco de circunferência* $\widehat{AB}$.

Se os pontos A e B coincidem (Fig. 1), eles determinam dois arcos: um deles é um *arco nulo* (um ponto) e o outro, é o arco de *uma volta* (é a circunferência). Se os pontos A e B são distintos (Fig. 2), eles determinam dois arcos: um deles é um *arco menor* e o outro, é o arco de *maior*.

Figura 1

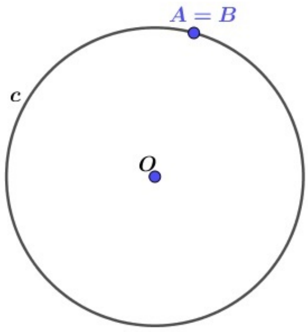


Figura 2

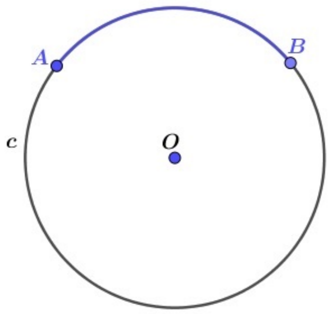
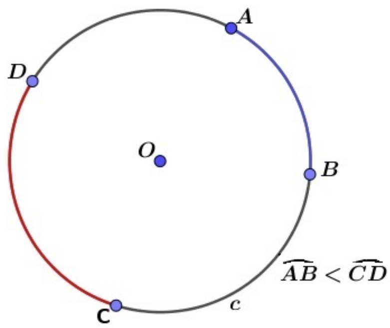
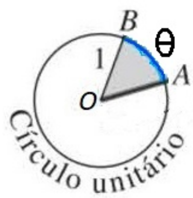


Figura 3



Para um círculo unitário (Fig. 4), de raio $r = 1$, tomando dois pontos A e B, θ corresponde ao comprimento do arco AB ($\widehat{AB}$) que o ângulo central AOB ($A\hat{O}B$) "corta"do círculo unitário.

Figura 4



O subconjunto de $C(O,r)$ – obtido pela interseção de $C(O,r)$ com o interior de $A\hat{O}B$ unido com $\{A,B\}$ – é um arco determinado pelos pontos A e B. Esse arco indicaremos por $\widehat{AB}$.

Se $A\hat{O}B$ é um ângulo raso ao arco AB, este será chamado de semicircunferência.

Ao subconjunto $(C(O,r) - \widehat{AB}) \cup \{A,B\}$, chamaremos **arco maior** (Fig. 2 e 4).

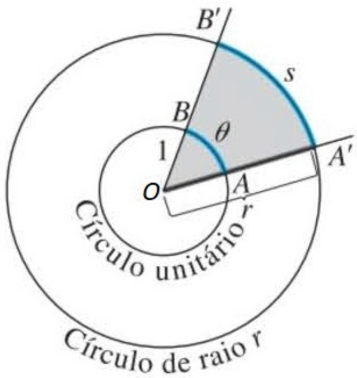
Definição 2. Numa circunferência $C(O,r)$ tomemos dois pontos A, B e consideremos o ângulo $A\hat{O}B$, que é o **ângulo central** (Fig. 4).

O *ângulo central* tem o vértice no centro da circunferência e o $\widehat{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$.

Grau (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

"A medida (em graus) de um arco da circunferência é igual a medida do ângulo central correspondente".

Figura 5



Ângulos são medidos em graus ou radianos. **Radiano** (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao *raio da circunferência* que contém o arco a ser medido.

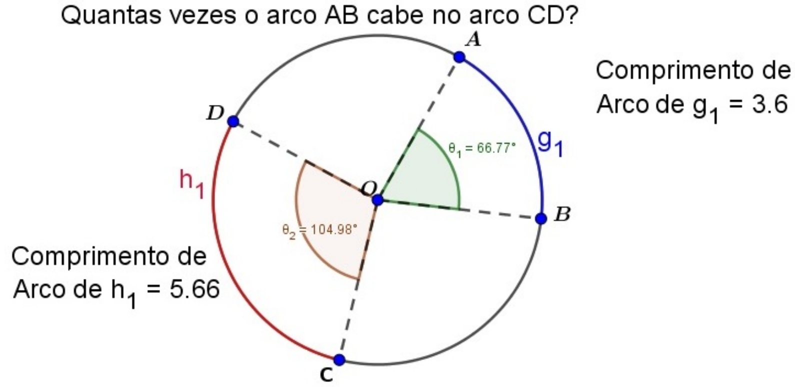
A medida em radianos do ângulo central AOB é o número $\theta = \frac{s}{r}$ e este é definido como o número de "unidades de raio"contidas no arco s subentendidas por esse ângulo central (Fig. 5).

Se denotamos esse ângulo central por θ quando medido em radianos, temos que

$$s = r \cdot \theta \quad (\theta \text{ em radianos}) \tag{1}$$

Para comparar o tamanho de dois arcos, tais como os arcos AB e CD (Fig. 3), distintos, verifica-se quantas vezes o arco unitário u (u não nulo e de mesmo raio que $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$) cabe nestes arcos, sendo u um número real.

Figura 3



Veja que a medida 3.6 cabe uma vez em 5.66. Na figura 6 podemos perceber quantas vezes $1rad$ cabe em α e quantas vezes a medida $\widehat{AA'}$ cabe na medida $\widehat{AB}$. E, na figura 7 vemos que a medida $\widehat{AB}$ cabe 4 vezes a medida do arco **u** ($1rad$) mais uma fração de um radiano.

Figura 6

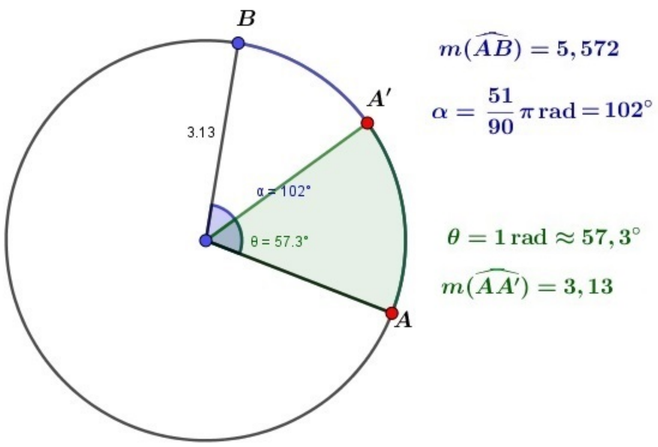
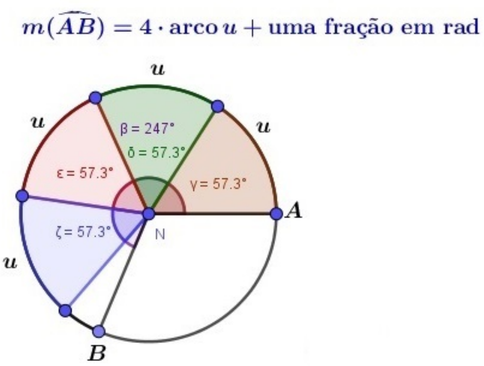
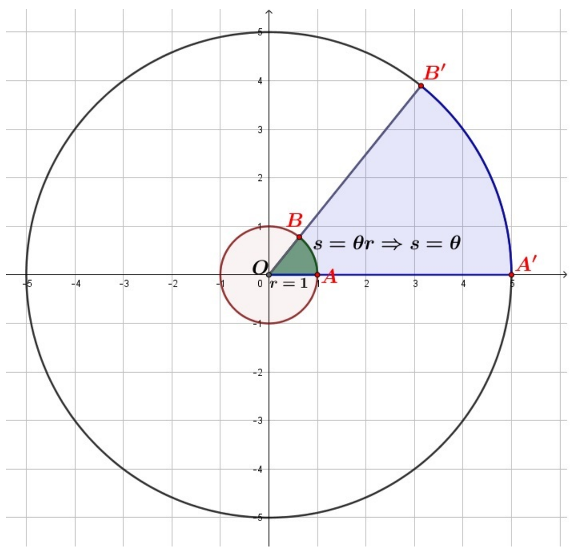


Figura 7



QUESTÃO 1: Prolongando o raio unitário em mais 5 unidades, teremos o segmento $OA' = OB' = r = 6un$. Determine o comprimento do arco $\widehat{A'B'}$, para:
$\theta = \dfrac{\pi}{6}, \theta = \dfrac{\pi}{4}, \theta = \dfrac{\pi}{3}, \theta = \dfrac{4\pi}{3}$ e $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Figura 8

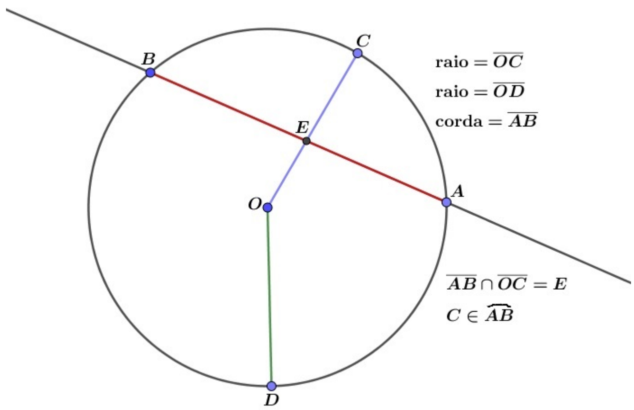


QUESTÃO 2: Obtenha a medida do ângulo $A'\hat{O}B'$ que determina numa circunferência de raio $r = 5cm$ um arco $\widehat{A'B'}$ de medida $S = 8cm$.

A reta determinada por A e B separa o plano em dois semiplanos (Fig. 9). Quando $\overline{AB}$ não é um diâmetro, o centro da circunferência está contido no mesmo semiplano que contém o arco maior. Os raios definidos pelo centro O da circunferência e pontos do arco $\widehat{AB}$ interceptam a corda $\overline{AB}$. Aqueles que ligam O aos pontos do arco maior não interceptam a corda $\overline{AB}$.

A cada ângulo central $A\hat{O}B$ fica associado um único arco $\widehat{AB}$ na circunferência, e reciprocamente.

Figura 9



Uma vez que uma volta inteira do círculo unitário equivale a 360^o ou 2π radianos, temos

$$\pi \;\; radianos = 180^o \tag{2}$$

$$\text{e 1 radiano} = \frac{180^o}{\pi} \; (\approx 57{,}3 \text{ graus}) \text{ ou 1 grau} = \frac{\pi}{180^o} \; (\approx 0{,}017) \text{ radianos.}$$

QUESTÃO 3: Complete a tabela abaixo, determinando as medidas de ângulos em radianos.

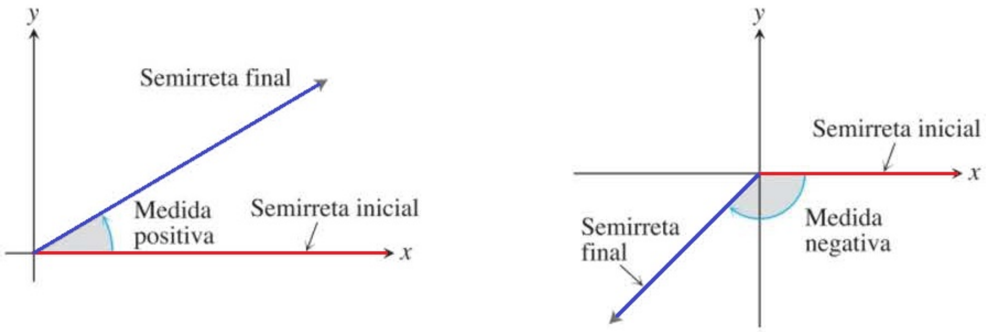
Grau	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
θ									

QUESTÃO 4: Complete a tabela abaixo, determinando as medidas de radianos em ângulos.

θ rad	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grau								

Um ângulo no plano xy fica na posição padrão quando o seu vértice está posicionado na origem dos eixos e sua semirreta inicial está sobre o eixo x, no sentido positivo.

Figura 10

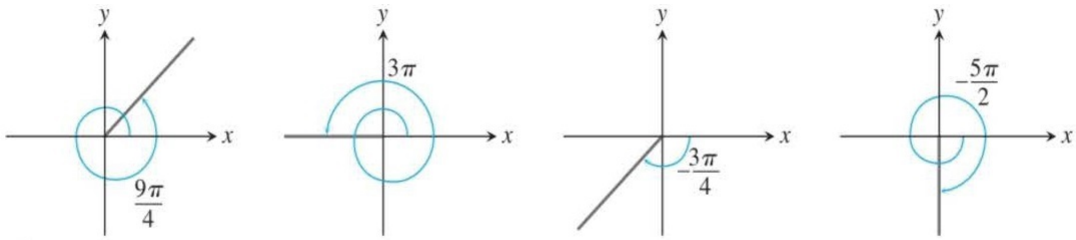


Ângulos na posição padrão do plano *xy*.

São atribuídas medidas positivas aos ângulos medidos no sentido anti-horário a partir do eixo x positivo; os ângulos medidos no sentido horário recebem medidas negativas.

Ângulos que descrevem rotações no sentido anti-horário podem se distanciar arbitrariamente além de 2π radianos (ou 360^o). Assim como, os ângulos que descrevem rotações no sentido horário podem ter medidas negativas de todos os tamanhos.

Figura 11



Medidas em radianos diferentes de zero podem ser positivas ou negativas e ultrapassar 2π.