Triângulos

Três pontos G, H e J, não colineares, determinam três segmentos de reta: $\overline{GH}$, $\overline{HJ}$ e $\overline{GJ}$. A reunião dos segmentos de reta $\overline{GH}$, $\overline{HJ}$ e $\overline{GJ}$ é chamada triângulo GHJ (Fig. 6).

$$\triangle GHJ = \overline{GH} \cup \overline{HJ} \cup \overline{GJ}$$

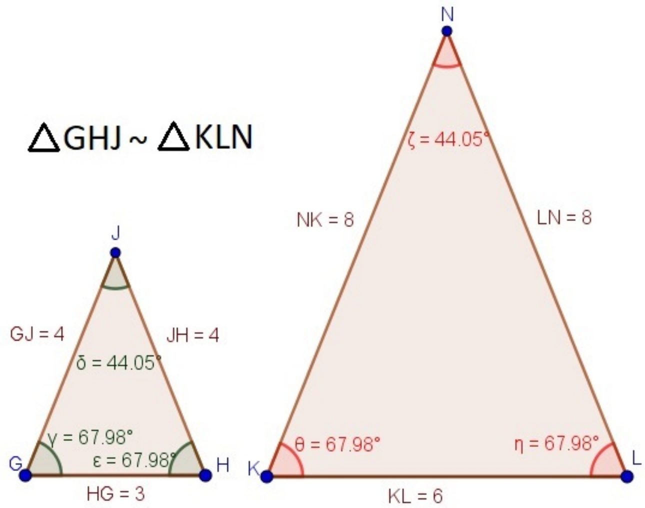
Vértices: G, H e J;

Lados: $\overline{GH}$, $\overline{HJ}$ e $\overline{GJ}$

Ângulos: $\hat{G}$, $\hat{H}$ e $\hat{J}$ (internos).

Definição 5. Dois triângulos são semelhantes se existe uma bijeção (chamada semelhança) entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais.

Figura 1



Significado da Definição 5: Dados dois triângulos, GHJ e KLN, seja

$$\varphi : \{G, H, J\} \to \{K, L, N\} \text{ tal que } K = \varphi(G), \ L = \varphi(H), \ N = \varphi(J);$$
$$\text{se } \hat{K} = \hat{G}, \ \hat{L} = \hat{H}, \ \hat{N} = \hat{J} \text{ e } \frac{\overline{GH}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{GJ}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{LN}},$$

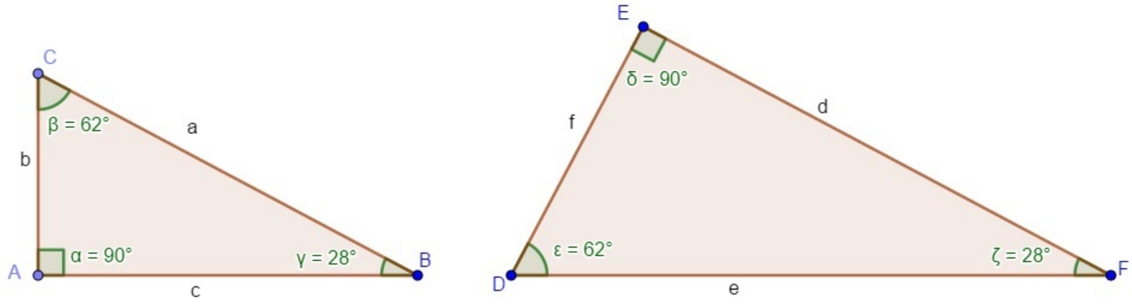
então os triângulos GHJ e KLN são semelhantes.

Quando dois triângulos são semelhantes os ângulos correspondentes são ditos homólogos, assim como os lados correspondentes são chamados lados homólogos. A razão entre as medidas de dois lados homólogos é chamado razão de semelhança entre os dois triângulos.

Triângulo retângulo

Definição 6. Um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é *reto* (Fig. 7).

Figura 2



$$\hat{A} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{F} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{DF}$$

Tomando o triângulo ABC, podemos observar seus elementos:

- *os lados do ângulo:* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$;
- *os ângulo internos:* $C\hat{A}B, A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$;
- *as medidas dos lados:* $a =$ medida de $\overrightarrow{BC}, b =$ medida de $\overrightarrow{AC}$ e $c =$ medida de $\overrightarrow{AB}$;
- *as medidas dos ângulos:* $\hat{A} =$ medida de $C\hat{A}B, \hat{B} =$ medida de $A\hat{B}C$ e $\hat{C} =$ medida de $A\hat{C}B$;

O lado $\overrightarrow{BC}$, oposto ao ângulo reto, é chamado **hipotenusa** e os lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, adjacentes ao ângulo reto, são chamados **catetos do triângulo** ABC.

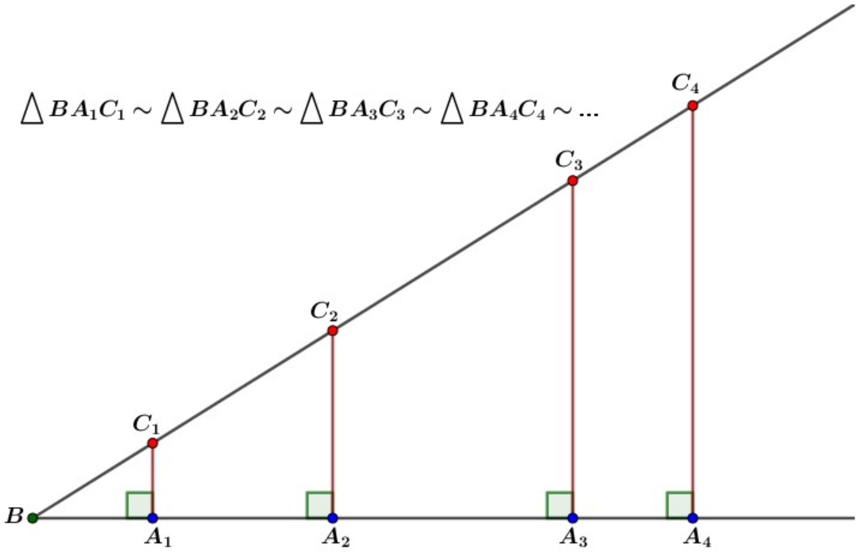
Teorema 1. (Pitágoras) Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Teorema 2. (Recíproco do Teorema de Pitágoras) Se um triângulo possui lados medindo a, b, c e se $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo e a hipotenusa é o lado com medida a.

Razões trigonométricas

Dado um ângulo agudo $\hat{B}$, marcando os pontos $A_1, A_2, A_3, \cdots$ sobre um de seus lados e conduzindo por eles, as perpendiculares $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{A_2C_2}$, $\overrightarrow{A_3C_3}, \cdots$ determinamos os triângulos retângulos $BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3, \cdots$ semelhantes entre si (Fig. 8).

Figura 3



Desta forma:

1º) $\dfrac{A_1C_1}{BC_1} = \dfrac{A_2C_2}{BC_2} = \dfrac{A_3C_3}{BC_3} = \cdots$ (fixado $\hat{B}$, o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais);

2º) $\dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA_2}{BC_2} = \dfrac{BA_3}{BC_3} = \cdots$ (fixado $\hat{B}$, o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais);

3º) $\dfrac{A_1C_1}{BA_1} = \dfrac{A_2C_2}{BA_2} = \dfrac{A_3C_3}{BA_3} = \cdots$ (fixado $\hat{B}$, os catetos oposto e adjacente a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais);

4º) $\dfrac{BA_1}{A_1C_1} = \dfrac{BA_2}{A_2C_2} = \dfrac{BA_3}{A_3C_3} = \cdots$ (fixado $\hat{B}$, os catetos adjacente e oposto a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais).

em que A_1C_1 = medida de $\overline{A_1C_1}$, etc.

As relações acima dependem apenas do valor do ângulo $\hat{B}$. Assim, tomando o triângulo retângulo ABC (Fig. 7) e fixando um ângulo agudo $\hat{B}$, temos:

1º) *Seno de um ângulo agudo* é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$$

2º) *Cosseno de um ângulo agudo* é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$$

3º) *Tangente de um ângulo agudo* é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$\tan \hat{B} = \frac{b}{c}$$

4º) *Cotangente de um ângulo agudo* é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e o cateto oposto ao ângulo.

$$\cot \hat{B} = \frac{c}{b}$$

Questão 1: Dado o triângulo retângulo CDE, reto em C, de catetos medindo $\overline{CE} = 4$ e $\overline{CD} = 2$. Calcule:

a) $\sin \hat{D}$ b) $\cos \hat{D}$ c) $\tan \hat{D}$ d) $\cot \hat{D}$

e) $\sin \hat{E}$ f) $\cos \hat{E}$ g) $\tan \hat{E}$ h) $\cot \hat{E}$

Questão 2: Dado o triângulo retângulo ABC, reto em A, de lados medindo $\overline{AC} = 2$ e $\overline{BC} = 8.25$. Calcule:

a) $\sin \hat{B}$ b) $\cos \hat{B}$ c) $\tan \hat{B}$ d) $\cot \hat{B}$

e) $\sin \hat{C}$ f) $\cos \hat{C}$ g) $\tan \hat{C}$ h) $\cot \hat{C}$