Ângulos e seus Elementos

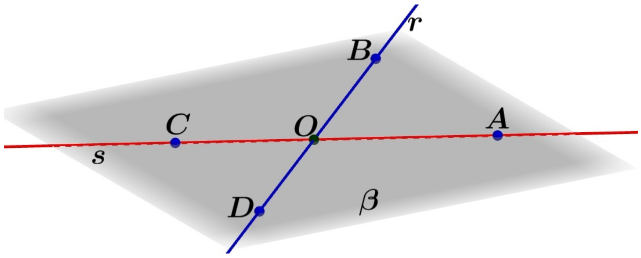
Uma reta divide um plano em duas regiões e cada uma dessas é um *semiplano*. Duas retas concorrentes em um mesmo plano β o divide em quatro regiões.

Cada uma dessas quatro regiões, com as respectivas semirretas, é um *ângulo*.

Observando-os separadamente, temos:

– Ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$;
– Ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$;
– Ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$;
– Ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OA}$;

Figura 1



Ângulo é a figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. A origem comum é denominada vértice e as semirretas são os lados do ângulo.

A medida usual ao ângulo é o grau (°) e o instrumento para medi-lo é o transferidor.

Dizemos que os *ângulos de mesma medida são congruentes* e indicamos ângulos utilizando-se letras do alfabeto grego $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, ou por três letras maiúsculas [extremidades e origem do ângulo – $A\hat{O}B$ (Fig. 1)].

Utilizamos o transferidor para obter a medida aproximada de um ângulo e, este contém um segmento de reta em sua base e um semicírculo na parte superior marcado com unidades de 0°a 180°(ou 360°, em caso de uma volta).

Para medir um ângulo, construa uma reta r e posicione nela, da esquerda para a direita, os pontos O e A. Coloque o centro do transferidor no ponto O, que será o vértice do ângulo e alinhe o segmento de reta OA com um dos lados do ângulo, e escolha uma medida angular desejada e posicione o ponto B. Construa a semirreta $\overrightarrow{OB}$, que será o outro lado do ângulo.

Interior e Exterior de um Ângulo

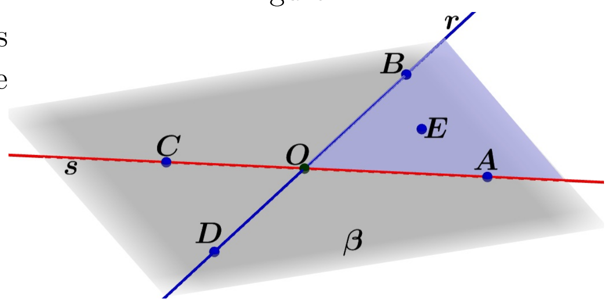
Tomando o $A\hat{O}B$ (Fig. 1), na cor azul, podemos destacar pontos no seu interior, no exterior e sobre seus lados.

Pontos no interior: E.

Pontos no exterior: C e D.

Pontos nos lados: A, O e B.

Figura 2



Observando diferentes ângulos, percebemos que eles têm diferentes "aberturas ".

A unidade padrão, que é o *grau*, é obtido dividindo-se a metade de uma circunferência em 180 partes de mesma medida. Isto é, 1º (um grau).

O grau possui dois submúltiplos: o *minuto de grau* e o *segundo de grau*.

$$\frac{1^\circ}{60} = 1' \text{ ou } 1^\circ = 60' \qquad \frac{1'}{60} = 1'' \text{ ou } 1' = 60''$$

Como 1º tem 60′ e 1′ tem 60”, então 1º tem 3600”

Classificação dos ângulos

✓ *Quanto à abertura dos lados:*

- Nulo: é o ângulo com abertura igual a $0°$.
- Ângulo agudo (acutângulo): é o ângulo que mede menos que $90°$.
- Ângulo obtuso (obtusângulo): possui abertura maior que $90°$.
- Ângulo reto (retângulo): é o ângulo que mede $90°$.
- Ângulo raso (meia volta): é o ângulo que mede $180°$.
- Ângulo pleno: é o ângulo que mede $360°$.
- Ângulos congruentes: dois ou mais ângulos são congruentes quando têm medidas angulares iguais.

✓ *Quanto às posições relativas dos ângulos:*

- Ângulos consecutivos: são aqueles que possuem o mesmo vértice e um lado em comum.
- Ângulos adjacentes: são ângulos consecutivos que não têm pontos internos comuns.
- Ângulos opostos pelo vértice: são congruentes entre si.

✓ *Quanto as somas dos ângulos:*

- Ângulos complementares: dois ângulos, são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas é igual a $90°$.
- Ângulos suplementares: dois ângulos, são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a $180°$.
- Ângulos replementares: dois ângulos, são replementares quando a soma de suas medidas é igual a $360°$.

Paralelas:

Por definição, duas retas são paralelas quando todos os pontos pertencentes a uma estão à mesma distância da outra, sendo que a distância entre um ponto e uma reta é a menor distância possível entre eles.
Portanto, esta distância é determinada pela perpendicular à reta que passa pelo ponto.

A distância entre dois pontos A e B é dada pela medida do segmento AB ($d(A, B) = AB$). Esta distância também pode ser indicada por uma letra minúscula, como por exemplo, $d(A, B) = d$.

A distância entre um ponto A e e uma reta r é dada pela medida do segmento AP perpendicular a r, com $p \in r$.
No caso do ponto A pertencer à reta r, temos que a distância de A até r é igual a zero ($A \in r \ \rightarrow d(A, r) = 0$).

A distância entre duas retas r e s paralelas é dada pela distância de um ponto A qualquer, de uma das retas, à outra reta ($d(r, s) = AP$).
Para r e s coincidentes, temos que a distância é zero: $r \equiv s \ \rightarrow \ d(r, s) = 0$.

Simetria

A *simetria axial* consiste na reflexão de um ponto em relação a uma reta (o eixo de simetria).

Dois pontos simétricos a um eixo de simetria apresentam duas propriedades:

* A reta determinada por eles é perpendicular ao eixo de simetria.
* Os pontos são equidistantes do eixo.

A simetria central consiste na reflexão de um ponto em relação a outro que é o centro de simetria.

Dois pontos simétricos a um terceiro apresentam duas propriedades:

* Os dois pontos simétricos e o centro de simetria são colineares.
* Os pontos simétricos são equidistantes do centro de simetria.

Curvas Abertas ou Fechadas

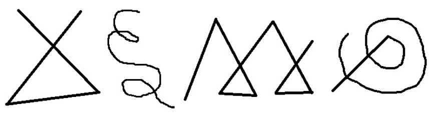
Todo tipo de linha, seja linha curva ou reta, é chamada de *Curva*.

Uma *curva aberta simples* tem extremidades e não tem cruzamentos.

Figura 3

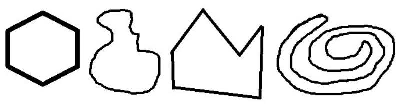
Uma *curva aberta não simples* tem extremidades e tem cruzamentos.

Figura 4



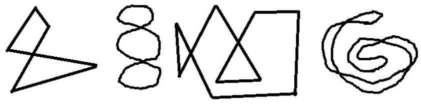
Uma *curva fechada simples* não tem extremidades e não tem cruzamentos.

Figura 5



Uma *curva fechada não simples* não tem extremidades e tem cruzamentos.

Figura 6



Polígono

É a região do plano limitada por uma linha quebrada ou poligonal fechada. A linha poligonal é uma linha formada pela ligação de segmentos de reta, de extremidade a extremidade. Os polígonos têm como elementos: lados, vértices, ângulos (internos e externos) e diagonais.

O ângulo interno de um polígono é o ângulo formado por dois lados consecutivos, dentro do polígono. O ângulo externo de um polígono é o ângulo fora do polígono, formado entre um lado e o prolongamento do lado consecutivo.

Os polígonos podem ser:

* *Polígono convexo:* Cada lado de um polígono é um segmento de reta contida em uma reta suporte. Esta reta divide o plano em dois semiplanos, o qual um deles contém o polígono. Quando todos os pontos de um polígono pertencem somente a um dos semiplanos determinado pela reta suporte, dizemos que o polígono é convexo.

* *Polígono não convexo:* É aquele em que a reta suporte (contendo um de seus lados) divide o polígono em duas regiões, cada uma contida em um semiplano oposto. Por exemplo, o polígono estrelado.

* *Polígonos regulares:* São polígonos que apresentam a medida dos lados e ângulos iguais. Por exemplo, o quadrado, o triângulo equilátero. Se um polígono possui lados iguais, alternadamente, então ele é um polígono semi-regular.

O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é igual a $n(n-3)/2$ e a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $180^o(n-2)$.

Triângulo (ou Trilátero): é o polígono que apresenta o menor número de lados e é resultado da interseção de três segmentos de reta consecutivos e não colineares.

Para que três segmentos de reta, $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$, formem um triângulo, é necessário que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC} \text{ e } \overline{AB} - \overline{BC} < \overline{AC}$$

Classificação dos triângulos de acordo com as medidas dos seus lados:

✓ *Triângulo equilátero:* é o triângulo que possui os três lados congruentes.

✓ *Triângulo isósceles:* é o triângulo que possui apenas dois lados com medidas congruentes.

✓ *Triângulo escaleno:* é o triângulo que possui cada lado com medida diferente.

Classificação dos triângulos quanto a medida de seus ângulos internos:

✓ *Triângulo retângulo:* é o triângulo que possui um ângulo reto.

✓ *Triângulo acutângulo:* é o triângulo que possui os três ângulos agudos (menores que 90°).

✓ *Triângulo obtusângulo:* é o triângulo que tem um ângulo obtuso (maior que 90°).

Outros elementos do triângulo:

* *Bissetrizes de um triângulo:* as bissetrizes de um triângulo correspondem aos segmentos de reta que têm origem em cada vértice dos ângulos do triângulo, dividindo-os em dois ângulos congruentes.

  Um triângulo tem três bissetrizes internas e o ponto de interseção determinado por elas é chamado de *incentro* (I).

  A circunferência que tem o incentro como centro e é tangente aos três lados do triângulo é denominada *circunferência inscrita* no triângulo.

* *Alturas de um triângulo:* a altura é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, que contenha o vértice oposto ao lado referido. Esse lado é chamado *base da altura.*

  O ponto de interseção das três alturas de um triângulo é denominado *ortocentro* (O).

* *Medianas de um triângulo:* a mediana é o segmento de reta que une cada vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. A mediana relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa. O ponto de interseção das três medianas é o *baricentro* ou *centro de gravidade do triângulo* (G).

  O baricentro divide a mediana em dois segmentos proporcionais: o segmento que une o vértice ao baricentro mede o dobro do segmento que une o baricentro ao lado oposto deste vértice. Assim, o baricentro divide a mediana na proporção $2:1$, ou seja, sendo A o vértice: $\overline{AG}/\overline{GM} = 2/1$.

* *Mediatrizes de um triângulo:* a interseção das mediatrizes relativas aos três lados do triângulo determina o *circuncentro* (C_i). Como o ponto C_i é equidistante dos três vértices do triângulo e ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Quadriláteros: são polígonos de quatro lados.

Elementos do quadrilátero:

✓ *Lados:* $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{AD}$.

✓ *Vértices:* A, B, C e D.

✓ *Ângulos:* $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$.

✓ *Diagonais:* segmentos que unem dois vértices opostos. Neste caso, os segmentos AC e BD são as duas diagonais do polígono.

Classificação de acordo com as medidas de seus lados: **Paralelogramos:** São quadriláteros que têm os lados opostos paralelos.

Exemplos:

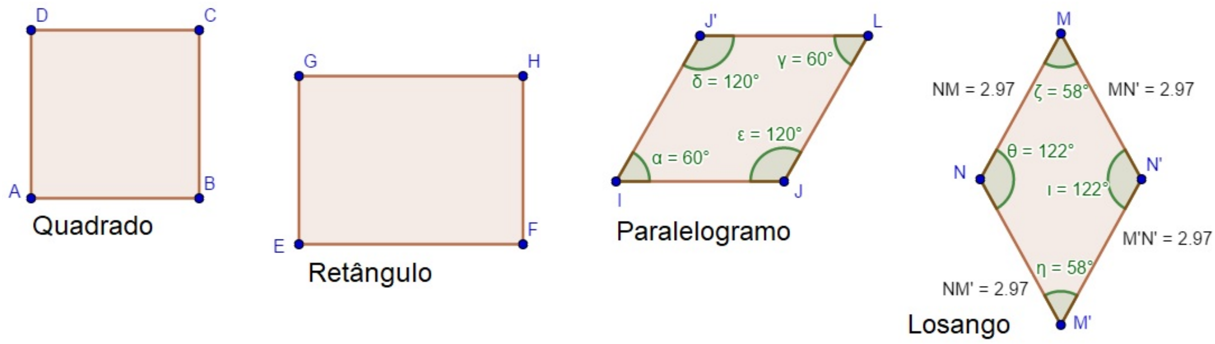
a) *Quadrado:* é o polígono de quadro lados congruentes e ângulos internos medindo 90°.

b) *Retângulo:* é o quadrilátero com lados paralelos congruentes dois a dois e ângulos internos medindo 90°.

c) *Paralelogramo propriamente dito ou romboide:* é o paralelogramo que tem os lados opostos iguais dois a dois e os ângulos opostos iguais entre si, mas diferentes de 90°.

Suas diagonais são diferentes e se cruzam num ângulo qualquer, diferente de 90°, o que não o torna inscritível na circunferência.

d) *Losango ou rombo:* é o quadrilátero com quatro lados congruentes e ângulos internos opostos congruentes entre si dois a dois.



Trapézios: são os quadriláteros com apenas dois lados paralelos denominados base maior e base menor. A distância entre essas duas bases é denominada altura do trapézio.

De acordo com as medidas de seus lados não paralelos podemos classificá-los como:

a) *Trapézio retângulo:* é o trapézio que contém dois ângulos retos, ou seja, um de seus lados é perpendicular às duas bases, formando dois ângulos de 90°.

b) *Trapézio isósceles:* é o trapézio que tem os lados não paralelos congruentes. Os ângulos da mesma base são iguais, assim como suas diagonais.

c) *Trapézio escaleno:* é o trapézio que tem os lados não paralelos diferentes (medidas diferentes) e não possui ângulo reto.

d) *Trapezoides:* são quadriláteros que não têm lados paralelos. Os trapezoides podem ser inscritíveis numa circunferência desde que seus ângulos opostos sejam suplementares, isto é, sua soma seja igual a 180°.